C. R. Acad. Sci. Paris, t. 305, Série I, p. 721-724, 1987

Analyse complexe/*Complex Analysis*

Disques extrémaux de Kobayashi et équation de Monge-Ampère complexe

Giorgio PATRIZIO

Résumé — Sur une variété sur laquelle est définie une solution de l'équation de Monge-Ampère complexe ayant une singularité donnée en un point isolé, on prouve que les feuilles du feuilletage de Monge-Ampère sont des disques extrémaux pour la métrique et la distance de Kobayashi.

Extremal disks of Kobayashi and complex Monge-Ampère equation

Abstract — *For manifolds carrying solutions of the homogeneous complex Monge-Ampère equation with a prescribed singularity at an isolated point, it is shown that the leaves of the Monge-Ampère foliation are extremal disks for the Kobayashi metric and distance.*

1. Dans [4] on a considéré la classe de variétés suivante. Soit M une variété complexe, connexe, non compacte de dimension n et soit $\tau : M \to [0, R)$, $0 < R = \sup \tau \leqq +\infty$, une fonction exhaustive (i. e. propre). Le couple (M, τ) est dit *variété de type circulaire* si, en notant $M_* = M - \tau^{-1}(0)$, on a

(1.1.) $$\tau \in C^0(M) \cap C^\infty(M^*),$$

(1.2) $$d d^c \tau > 0 \quad \text{et} \quad d d^c \log \tau \geqq 0 \quad \text{sur } M_*,$$

(1.3) $$(d d^c \log \tau)^n \equiv 0 \quad \text{sur } M_*,$$

(1.4) $\exists p \in \tau^{-1}(0)$ tel que : (i) on a $C \| Z \|^2 \leqq \tau(Z) \leqq K \| Z \|^2$ en termes de coordonnées locales $Z = (z_1, \ldots, z_n)$ centrées en p, $\| \;\|$ étant la norme euclidienne et $C, K > 0$ deux constantes, (ii) si $P : \hat{M} \to M$ est l'éclatement de M en p, alors $\tau \circ P \in C^\infty(\hat{M})$.

Un exemple d'une telle variété est donné par tout domaine circulaire, borné, lisse, strictement pseudoconvexe de $\mathbb{C}^n$ avec le carré de sa fonctionnelle de Minkowski. Un résultat très peu trivial de Lempert [2] a pour conséquence que pour tout domaine strictement convexe $D \subset\subset \mathbb{C}^n$, et pour tout $p_0 \in D$, il existe $\tau : D \to [0, 1)$ satisfaisant (1.1)-(1.4) tel que $\tau^{-1}(0) = p_0$. Dans ce cas τ est construit de façon telle que les feuilles du feuilletage associé à $\log \tau$ soient des disques extrémaux de la métrique et de la distance de Kobayashi. Nous montrerons ici que cela arrive pour toute variété (M, τ) de type circulaire lorsque $R = \sup \tau < +\infty$ (i. e. quand M est hyperbolique).

2. Avant d'énoncer et prouver le résultat principal il nous faut rappeler certains faits. Soit (M, τ) une variété de type circulaire avec $\sup \tau = R < +\infty$. On peut supposer $R = 1$ sans perte de généralité. Soient $U \subset \mathbb{C}$ le disque unité et $S \subset \mathbb{C}^n$ la sphère unité. On sait que le feuilletage de Monge-Ampère associé à $\log \tau$ (i. e. le feuilletage induit par la distribution $\{v \in T^{1,0}(M_*) \mid d d^c \log \tau(v, \bar{v}) = 0\}$, *voir* [1], [6], [7], est engendré par le champ de vecteurs X défini localement par

(2.1) $$X = X^\mu \frac{\partial}{\partial z^\mu} = \tau^{\mu \bar{\nu}} \tau_{\bar{\nu}} \frac{\partial}{\partial z^\mu}$$

où $(\tau^{\mu \bar{\nu}})$ est la matrice inverse de $(\tau_{\mu \bar{\nu}})$ avec

$$\tau_{\mu \bar{\nu}} = \frac{\partial^2 \tau}{\partial z^\mu \partial \bar{z}^\nu}, \qquad \tau^{\bar{\nu}} = \frac{\partial \tau}{\partial \bar{z}^\nu}.$$

Note présentée par Paul MALLIAVIN.

0249-6291/87/03050721 \$ 2.00

sous-harmonique car pour tout $z \neq 0$ nous avons

$$\Delta \log h(z) = \Delta \log h(z) + \Delta \log |z|^2 = \Delta \log (f(z)) \geqq 0.$$

Puisque $\log h \leqq 0$ dans U et $\log h(0) = 0$, on tire du principe du maximum que $\log h \equiv 0$ et donc $h \equiv 1$ dans U. Cela implique $\tau(f(z)) = |z|^2$ pour tout $z \in \mathrm{U}$. Pour avoir $f = \mathrm{F}(., b)$ il suffit de prouver que f' est tangent à une feuille de Monge-Ampère dans M_*, c'est-à-dire que l'on a $d d^c \log \tau (f', \bar{f}') = 0$. Puisque

$$\tau_\mu(f(z)) f^{\mu'}(z) = \bar{z}, \qquad \tau_{\mu\nu}(f(z)) f^{\mu'}(z) \overline{f^{\nu'}(z)} = 1,$$

on déduit par le calcul

$$\tau^2(f(z))\, d d^c \log \tau(z))(f'(z), \overline{f'(z)})$$

$$= \left(\frac{i}{2\pi}\right)\left(\tau(f(z))\,\tau_{\mu\bar{\nu}}(f(z)) f^{\mu'}(z)\overline{f^{\nu'}(z)} - \tau_\mu(f(z)) f^{\mu'}(z)\,\tau_{\bar{\nu}}(f(z))\overline{f^{\nu'}(z)}\right)$$

$$= \left(\frac{i}{2\pi}\right)(|z|^2 - z\bar{z}) = 0$$

ce qui prouve la thèse.

Pour démontrer (ii) il suffit de montrer que si $f : \mathrm{U} \to \mathrm{M}$ est une application holomorphe et $f(0) = \mathrm{O}$, $f(x) = \mathrm{F}(w, b)$, alors $|x| \geqq |w|$. Comme dans (i) on peut prouver l'existence de $h \in \mathrm{C}^\infty(\mathrm{U})$ telle que $0 < h \leqq 1$ sur $\mathrm{U} - \{0\}$ et $\tau(f(z)) = h(z)|z|^2$ pour tout $z \in \mathrm{U}$. Il s'ensuit

$$h(x)|x|^2 = \tau(f(x)) = \tau(\mathrm{F}(w, b)) = |w|^2$$

et donc $|x|^2 = (h(x))^{-1}|w|^2 \geqq |w|^2$ comme on voulait. L'unicité suit du principe du maximum comme pour (i).

3. Nous avons obtenu dans [3] et [5] certains résultats basés sur le fait que, dans des domaines strictement convexes, les feuilles de Monge-Ampère sont des disques extrémaux pour la métrique de Kobayashi. On peut étendre ces résultats à des variétés de type circulaire par le même procédé. On a par exemple :

THÉORÈME 3.1. — *Soit* (M, τ) *une variété de type circulaire telle que* $\sup \tau = 1$ *et* $\tau^{-1}(0) = \mathrm{O}$. *Nous supposons qu'il existe un groupe à un paramètre d'automorphismes* $\alpha : \mathbb{R} \times \mathrm{M} \to \mathrm{M}$ *admettant* O *comme point fixe et tel que* $d\alpha(0, \mathrm{O}) = \lambda\, \mathrm{Id}$ *pour un* $\lambda \in \mathbb{C} - \{0\}$ *donné. Alors* M *est biholomorphiquement équivalente à un domaine circulaire dans* $\mathbb{C}^n$.

La preuve peut être résumée de la façon suivante : Dans [4] nous avons montré que M est biholomorphiquement équivalente à un domaine circulaire si et seulement si son feuilletage de Monge-Ampère est holomorphe [i. e. le champ vectoriel X défini par (2.1) est holomorphe]. Or, si $\mathrm{Y} = \dot{\alpha}(0)$ est le champ associé à α, alors, en employant le théorème 2.2, par un simple calcul (le même que dans le cas strictement convexe, *voir* § 8 de [3]) on montre que l'on a $\mathrm{X} = \lambda^{-1}\mathrm{Y}$ et donc X est holomorphe.

On a aussi :

THÉORÈME 3.2. — *Soient* (M_j, τ_j), $j = 1, 2$, *deux variétés de type circulaire satisfaisant* $\sup \tau_j = 1$ *et* $\tau_j^{-1}(0) = \mathrm{O}_j$. *Soit* $\varphi : \mathrm{M}_1 \to \mathrm{M}_2$ *une application holomorphe telle que* $\varphi(\mathrm{O}_1) = \mathrm{O}_2$. φ *est alors biholomorphe si et seulement si, au point* O_1, φ *est une isométrie pour la métrique ou la distance de Kobayashi.*

En effet si φ est une isométrie au point O_1 comme on a dit, en indiquant par F_j l'application définie en (2.2) pour M_j, on peut se servir du théorème 2.2 en obtenant

$$\varphi(\mathrm{F}_1(z, b)) = \mathrm{F}_2(z, d\varphi(\mathrm{O}_1) b / \| d\varphi(\mathrm{O}_1) b \|)$$

En d'autres termes les feuilles du feuilletage de Monge-Ampère sont les courbes (complexes) intégrales de X. Nous avons prouvé dans [4] que $\tau^{-1}(0)$ est réduit à un seul point O et que le feuilletage de Monge-Ampère peut être décrit par le résultat suivant (ici et dans la suite nous identifions $\mathbb{C}^n$ et espaces tangents).

Théorème 2.1. — *Il existe une seule application* C^∞, *surjective*

$$F:\quad U\times S\to M \tag{2.2}$$

telle que $F(0, b)=O$, $\tau(F(z, b))=|z|^2$ *et* $F(z, \lambda b)=F(\lambda z, b)$ *pour tout* $z\in U$, $b\in S$ *et* $\lambda\in U$. *De plus* $F(., b): U\to M$ *est propre, injectif et holomorphe pour tout* $b\in S$ *avec* $X(F(z, b))=zF'(z, b))$ *et* $F'(0, b)=\|F'(0, b)\|b\neq 0$.

Soit K la métrique de Kobayashi de M. Nous dirons que l'application holomorphe $f: U\to M$ est *extrémale par rapport à* $p\in M$ *et* $v\in T_p(M)$ si $f(0)=p, f'(0)=tv$ et $K(p, v)=t^{-1}$. Soient δ la distance de Kobayashi sur M et ρ la distance hyperbolique sur U. Nous dirons que l'application holomorphe $g: U\to M$ est *extrémale par rapport à* p, $q\in M$ s'il existe z, $w\in U$ avec $g(z)=p$, $g(w)=q$ et $\delta(p, q)=\rho(z, w)$. On a le théorème suivant :

Théorème 2.2. — *Soit* (M, τ) *une variété de type circulaire avec* $\sup\tau=1$ *et* $\tau^{-1}(0)=O$. *Soit* F *l'application* (2.2). *Alors pour tout* $b\in S$ *l'on a*

(i) $F(., b): U\to M$ *est la seule application extrémale par rapport à* O *et* b;

(ii) $F(., b): U\to M$ *est la seule application extrémale par rapport à* O *et* $F(w, b)$, *pour tout* $w\in U-\{0\}$.

Démonstration. — Soit $f: U\to M$ une application holomorphe telle que $f(0)=O$ et $f'(0)=tb$, $t>0$. Pour prouver que $F(., b)$ est extrémale par rapport à O et b il suffit de vérifier l'inégalité $\|F'(0), b)\|\geqq t$. Soit $\sigma=\tau\circ f$. Alors σ est sous-harmonique de classe C^∞ dans U car τ est strictement plurisous-harmonique et satisfait (1.4). En outre, si l'on pose $u=\log\sigma$, on a $u\leqq 0$ et

$$|u(z)-2\log|z||=O(1)\qquad\text{pour}\quad z\to 0.$$

Mais alors $\log|z|^2$ est une majorante harmonique de $u(z)$ et donc, pour tout $z\in U$,

$$\tau(f(z))=\sigma(z)\leqq|z|^2=\tau(F(z, b)).$$

Il existe donc une fonction $h\in C^\infty(U)$ telle que $0\leqq h\leqq 1$ et $\tau(f(z))=h(z)|z|^2$. On obtient alors par différentiation

$$\tau_{\mu\bar\nu}(f(z))f^{\mu'}(z)\overline{f^{\nu'}(z)}=h_{z\bar z}(z)|z|^2+h_z(z)\bar z+h_{\bar z}(z)z+h(z).$$

Puisque τ satisfait (1.4) (ii), alors pour tout $b\in S$ et toute courbe holomorphe $g: U\to M$ telle que $g(0)=O$, $g'(0)=tb$ pour $t>0$, la limite $\tau^b_{\mu\bar\nu}(0)=\lim\limits_{z\to 0}\tau_{\mu\bar\nu}(g(z))$ existe et ne dépend pas du choix de g. On a donc

$$1\geqq h(0)=\lim_{z\to 0}\tau_{\mu\bar\nu}(f(z))f^{\mu'}(z)f^{\nu'}(z)=t^2\tau^b_{\mu\bar\nu}(0)b^\mu\bar b^\nu.$$

D'autre part, à cause du théorème 2.1, nous avons $\tau(F(z, b))=|z|^2$ et par suite

$$\|F'(0, b)\|^2\tau^b_{\mu\bar\nu}(0)b^\mu\bar b^\nu=\lim_{z\to 0}\tau_{\mu\bar\nu}(F(z, b))F^{\mu'}(z, b)\overline{F^{\nu'}(z, b)}=\lim_{z\to 0}\frac{\partial^2\tau}{\partial z\,\partial\bar z}(F(z, b))=1$$

d'où $t^2\leqq\|F'(0, b)\|^2$. $F(., b)$ est donc extrémale. Pour montrer l'unicité nous observons que si $f: U\to M$ est aussi extrémale par rapport à O et b et si l'on pose $\sigma=\tau\circ f$ alors, comme on a déjà vu, on a $\sigma(z)=h(z)|z|^2$ avec $0\leqq h\leqq 1$, $h(0)=1$. D'autre part $\log h$ est comme on a fait dans [5], § 3, pour des domaines convexes. Mais alors la bijectivité de φ résulte des propriétés des F_j. L'autre implication est bien connue.

4. Soit $M \subset\subset \mathbb{C}^n$ un domaine lisse, strictement pseudoconvexe, défini par la fonction ρ. Une application C^∞ $f: \bar{U} \to \bar{M}$ est dite *stationnaire* si elle est propre, holomorphe dans U et s'il existe une fonction C^∞ $p: \partial U \to (0, +\infty)$ telle que, pour $\mu = 1, \ldots, n$, la fonction $\hat{f}^\mu(z) = zp(z)\, \rho_\mu(f(z))$ soit prolongeable de ∂U en une fonction lisse sur $\bar{U}$ et holomorphe sur U. Lempert a montré dans [2] que si M est strictement convexe, alors toute application stationnaire est aussi extrémale, et il a prouvé ainsi l'existence d'applications extrémales à partir de l'existence d'applications stationnaires. Soit $\tau: \bar{M} \to [0, 1]$ une exhaustion, $\tau \in C^0(\bar{M}) \cap C^\infty(\bar{M} - \tau^{-1}(0))$, qui satisfait (1.2), (1.3), (1.4); alors son application associée définie par (2.2) se prolonge en une application lisse $F: \bar{U} \times S \to \bar{M}$. Il est facile de montrer que, pour tout $b \in S$, l'application $F(., b)$ est stationnaire. En effet, pour tout b on peut choisir $p \equiv 1$ et rappeler (2.1) et le théorème 2.1 pour obtenir $\hat{F}^\mu(z, b) = (\bar{z})^{-1}\, \tau_\mu(F(z, b)) = \tau_{\mu\bar{\nu}}(F(z, b))\, \overline{F^{\nu\prime}(z, b))}$ pour tout $z \in \bar{U} - \{0\}$. Mais alors, puisque $\tau_{\mu\bar{\nu}}(F(z, b))\, F^{\mu\prime}(z, b)\, \overline{F^{\nu\prime}(z, b)} = 1$, on a immédiatement que $\hat{F}(., b)$ est holomorphe dans U.

Note reçue le 22 juin 1987, acceptée le 30 juin 1987.

RÉFÉRENCES BIBLIOGRAPHIQUES

[1] E. BEDFORD et M. KALKA, *Comm. pure and Appl. Math.*, 30, 1977, p. 543-571.
[2] L. LEMPERT, *Bull. Soc. Math. Fr.*, 109, 1981, p. 427-474.
[3] G. PATRIZIO, *Manuscripta Math.*, 47, 1984, p. 271-309.
[4] G. PATRIZIO, *Math. Zeit.*, 189, 1985, p. 343-363.
[5] G. PATRIZIO, *Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa*, XIII, 1986, p. 267-279.
[6] W. STOLL, *Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa*, VII, 1980, p. 87-154.
[7] P. M. WONG, *Invent. Math.*, 67, 1982, p. 261-274.

Dipartimento di Matematica, II, Università di Roma, 00173 *Roma, Italie.*