Capitolo 1

Cinematica dei sistemi rigidi

1.1 Introduzione

In questo capitolo descriveremo come si muove un corpo rigido nello spazio.

Lo scopo è duplice: da un lato vogliamo determinare la relazione fondamentale che lega le velocità di punti differenti che "partecipano di uno stesso moto rigido" (ovvero si muovono mantenendo inalterate le mutue distanze) rispetto a un *osservatore* fisso; dall'altro vogliamo trovare le relazioni che legano le osservazioni che *due* osservatori, in moto tra loro, fanno dei moti di altri "corpi" (punti o corpi rigidi). Quest'ultimo problema prende il nome di *cinematica relativa*.

Con l'espressione *osservatore* ci riferiamo a un sistema cartesiano ortogonale, con orientamento fissato, cioè nel quale sono determinati: un'origine, un'unità di misura per le lunghezze, tre assi ortogonali orientati (ovvero tra i quali si sia fissato un *ordine*, p.e. gli assi x, y e z disposti come i diti pollice, indice e medio della mano destra[1]) e un *orologio* per misurare il tempo.

1.2 Moti rigidi

Sia quindi fissato un osservatore, che indicheremo con $\Sigma = (\Omega, (\xi, \eta, \zeta))$ e che chiameremo osservatore *fisso*[2] e studiamo il moto di un *sistema rigido* rispetto a questo osservatore.

Per prima cosa elimiamo dalla nostra analisi il caso degenere in cui tutti i punti del sistema siano allineati (o ci siano solo due punti): in questo caso i moti possibili sono tutti e soli quelli che può effettuare un sistema formato da due punti vincolati a mantere invariata la loro distanza (vedremo questo caso quando tratteremo dei sistemi olonomi).

Consideriamo quindi un sistema di punti collegati tra loro in modo da mantenere invariate le loro mutue distanze e che contenga almeno tre punti non allineati $\mathbf{P}_1$, $\mathbf{P}_2$, $\mathbf{P}_3$.

[1]In questo caso diremo che il sistema di riferimento è *destrorso*; se scegliamo invece la disposizione delle prime tre dita della mano sisistra otteremo un riferimento *sinistrorso*. E' importante notare che un riferimento destrorso e uno sinistrrso non possono essere sovrapposti *mantenendo l'ordine degli assi*.

[2]Non indichiamo mai espicitamente la scelta dell'orologio per un osservatore. In questo paragrafo la scelta dell'orologio non è molto importante in quanto l'osservatore fisso è il solo che vede i punti in movimento. Dovremo tornare su questo problema nel caso della cinematica relativa.

A un tale sistema è possibile associare una terna cartesiana $S = (\mathbf{O}, (x, y, z))$ di versori $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$, in modo tale che ogni punto del sistema abbia coordinate $(x, y, z)^T$ costanti nel riferimento S.

Un modo per costruire questo riferimento può essere il seguente: Poniamo $\mathbf{O} = \mathbf{P}_1$, $\mathbf{i} = \mathrm{vers}(\mathbf{P}_2 - \mathbf{P}_1)$, $\mathbf{j} = \mathrm{vers}(\mathbf{i} \wedge (\mathbf{P}_3 - \mathbf{P}_1))$ e infine $\mathbf{k} = \mathbf{i} \wedge \mathbf{j}$.

Nota che una volta associata una terna, che diremo solidale, il numero di punti di cui è composto il sistema non ha più importanza: ogni punto viene ora collocato nello spazio una volta che siano note le sue coordinate nella terna solidale, che sono costanti, e la posizione nello spazio della terna stessa.[3]

In altre parole il moto di un sistema rigido nello spazio è equivalente al moto di una terna di riferimento.

Ovviamente possiamo parlare di moto solo in presenza di un osservatore, ovvero di un sistema di riferimento che consideriamo convenzionalemente come fisso e che abbiamo indicato $\Sigma = (\Omega, (\xi, \eta, \zeta))$ Indicheremo con $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$ i versori degli assi del sistema di riferimento Σ.

Ricapitolando, poiché i punti che partecipano al moto rigido hanno coordinate $(x, y, z)^T$ costanti nel sistema di riferimento solidale, ci basta conoscere la posizione del sistema S rispetto al sistema Σ per localizzare ogni punto del sistema rigido in moto. Abbiamo quindi ridotto il problema del moto rigido al moto relativo di due sistemi di riferimento nello spazio euclideo tridimensionale, ovvero situare, ad ogni istante, la terna mobile S rispetto alla terna fissa Σ.

A sua volta questo problema si scompone naturalmente nella localizzazione dell'origine della terna mobile rispetto alla terna fissa, e all'orientazione dei versori della terna mobile rispetto ai versori della terna fissa.

Dovremo quindi conoscere le tre coordinate in Σ, $(\xi_O, \eta_O, \zeta_O)^T$ (funzioni del tempo), dell'origine $\mathbf{O}$ della terna S e le nove componenti dei versori $(\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$ rispetto ai versori $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$. Le nove componenti dei versori sono però "vincolate" dalla ortonormalità del sistema di riferimento, ovvero dalle equazioni

$$\mathbf{i} \cdot \mathbf{i} = 1,\ \mathbf{j} \cdot \mathbf{j} = 1,\ \mathbf{k} \cdot \mathbf{k} = 1,\ \mathbf{i} \cdot \mathbf{j} = 0,\ \mathbf{j} \cdot \mathbf{k} = 0,\ \mathbf{k} \cdot \mathbf{i} = 0. \tag{1.1}$$

Com'è noto dal corso di geometria le mutue orientazioni dei versori di due riferimenti ortonormali sono parametrizzate dalle matrici ortogonali, ovvero da quelle matrici 3×3 che soddisfano alla condizione:

$$AA^T = I\,, \tag{1.2}$$

che è un modo compatto per riscrivere le (1.1)[4].

Poiché stiamo studiamo moti continui dello spazio, possiamo escludere le matrici a determinante negativo (che rappresentano un moto rigido *più un ribaltamento speculare*: quest'ultimo infatti non è riconducibile con continuità, attraverso moti rigidi, all'identità, che, a sua volta, indica lo "stato di partenza")[5] e limitarci alle matrici a determinante uguale a 1. Abbiamo quindi una parametrizzazione delle posizione di un

[3] Questa semplice osservazione ha una conseguenza importante: la cinematica dei sistemi rigidi discreti e dei sistemi rigidi continui può essere descritta allo stesso modo.

[4] Si ricordi che se la matrice A, come assumeremmo in seguito, è la matrice di cambiamento di coordinate dal sistema S al sistema Σ, le *colonne* di A sono le componenti in Σ dei vettori della base di S, da cui l'equivalenza delle (1.1) con (1.2)

[5] In altre parole, e in modo più formale: prendiamo la posizione a un certo istante come "configurazione di riferimento". Possiamo sempre orientare gli assi del sistema fisso in modo che questi coincidano con gli assi solidali. Avremo quindi $A(0) = \mathrm{Id}$. La (1.2) ci dice che, al variare del tempo $A(t)$ può assumere solo i valori 1 e -1. Ma il determinante è una funzione continua delle componenti della matrice, pensata come un elemento di $\mathbf{R}^{3\times3}$, quindi non può passare dal valore inizaiale 1 al valore -1.

sistema rigido S, relativamente a un altro sistema rigido Σ, tramite una coppia formata dal vettore $\mathbf{O} - \Omega = (\xi_O, \eta_O, \zeta_O)^T$ e dalla matrice A

$$A = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \hat{\eta}_3 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 \end{pmatrix} \tag{1.3}$$

dove con $(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1)^T$ si sono indicate le componenti di $\mathbf{i}$ nel sistema di riferimento Σ (e similmente per $\mathbf{j}$ e $\mathbf{k}$).

Le tre coordinate dell'origine del sistema mobile e le nove componenti della matrice di trasformazione individuano un "punto" in $\mathbf{R}^3 \times M^{3\times3} \equiv \mathbf{R}^9$. Tuttavia le nove componenti della matrice A sono vincolato a "muoversi" sulla sottovarietà determinata dalle equazioni (1.2) (o meglio nella componente connessa che soddisfa anche alla disequazione $\det A > 0$). Questo insieme, che ha la struttura di gruppo rispetto al prodotto tra matrici, si indica con la sigla $SO(3)$ dove 3 sta a indicare la dimensione della matrice (e quindi dello spazio su cui agisce come matrice di trasformazione), O sta per "ortogonale" e significa che le matrici devono soddisfare la (1.2) e infine S sta per "speciale" indicando che si prendono solo le matrici con determinante positivo.

Le equazioni (1.2), o equivalentemente le (1.1), formano un sistema di sei equazioni, algebriche di secondo grado, indipendenti tra loro[6]. Ne segue che l'insieme delle possibili "configurazioni" che un sistema di riferimento "mobile" può assumere rispetto a un sistema di riferimento "fisso" è parametrizzato dai punti dell'insieme $\mathbf{R}^3 \times SO(3)$, che risulta essere una varietà differenziabile di di dimensione 6; per esprimere ciò si usa dire che un sistema rigido che si muove nello spazio ha *6 gradi di libertà*.

Siano ora $(x, y, z)^T$ le coordinate di un punto $\mathbf{P}$ qualsiasi, solidale con il sistema di riferimento S, e $(\xi, \eta, \zeta)^T$ le corrispondenti coordinate nel riferimento Σ. Queste coordinate sono legate tra loro dalle trasformazioni

$$\begin{pmatrix} \xi \\ \eta \\ \zeta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \xi_O \\ \eta_O \\ \zeta_O \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \hat{\eta}_3 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} . \tag{1.4}$$

La (1.4) può ora essere derivata rispetto al tempo per otterene la velocità di un punto solidale $\mathbf{P}$. Questa relazione, detta *formula fondamentale del moto rigido*, è la relazione che lega tra loro le velocità (rispetto a un osservatore "fisso" dato) dei differenti punti di un sistema rigido e permette di esprimere la velocità di ogni singolo punto solidale in funzione delle variazioni dei *sei parametri fondamentali del moto rigido*.

Nella (1.4) ci sono tre termimi che dipendono dal tempo: le coordinate dei punti $\mathbf{P}$ e $\mathbf{O}$ nel sistema di riferimento fisso e le componenti della matrice A.

Deriviamo ora la (1.4).

$$\frac{\mathbf{d}}{\mathbf{d}t} \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \\ \zeta \end{pmatrix} = \frac{\mathbf{d}}{\mathbf{d}t} \begin{pmatrix} \xi_O \\ \eta_O \\ \zeta_O \end{pmatrix} + \frac{\mathbf{d}}{\mathbf{d}t} \begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} . \tag{1.5}$$

[6] Le (1.2) sono in verità nove equazioni, ma tre sono necessariamente dipendenti dalle altre poiché il prodotto di una matrice per la sua trasposta è sempre una matrice simmetrica. La verifica che la (1.2) fornisce effettivamente sei equazioni indipendenti va fatta calcolando la matrice jacobiana delle nove (sei in realtà) equazioni scalari in funzione delle componenti a_{ij} della matrice e verificando che la matrice così ottenuta ha rango sei.

La derivata a primo membro è la velocità del punto $\mathbf{P}$, così come la giudica Σ, e ugualmente la derivata di $(\xi_O, \eta_O, \zeta_O)^T$ è la velocità in Σ del punto $\mathbf{O}$.

Possiamo ora riscrivere la relazione (1.5) inserendo tra la derivata della matrice A e il vettore $(x, y, z)^T$ la matrice identità scritta nella forma $A^T A$ e abbiamo

$$\frac{\mathbf{d}}{\mathbf{d}t}\begin{pmatrix}\xi\\ \eta\\ \zeta\end{pmatrix} = \frac{\mathbf{d}}{\mathbf{d}t}\begin{pmatrix}\xi_O\\ \eta_O\\ \zeta_O\end{pmatrix} + \left(\frac{\mathbf{d}A}{\mathbf{d}t}A^T\right) A \begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix} . \tag{1.6}$$

Il termine $A\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\xi\\ \eta\\ \zeta\end{pmatrix}$ è il vettore di $\mathbf{R}^3$ delle comonenti del vettore geometrico $\mathbf{P}-\mathbf{O}$ *espresse nel sistema di riferimento* Σ (ovvero le differenze tra le coordinate di $\mathbf{P}$ e quelle di $\mathbf{O}$ calcolate da Σ). Osserviamo inoltre che se si sceglie un punto diverso da $\mathbf{O}$ come origine del riferimento solidale (mantenendo però gli stessi versori $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$) la matrice $\left(\frac{\mathbf{d}A}{\mathbf{d}t}A^T\right)$ che compare nella formula non cambia. Possiamo quindi dire che la distribuzione di velocità di tutti i punti di un sistema rigido si ottiene dalla formula (1.6) quando si conosca la velocità di un punto solidale e la matrice $\left(\frac{\mathbf{d}A}{\mathbf{d}t}A^T\right)$. Se avessimo fatto una diversa scelta del sistema di versori per il sistema fisso, la matrice $\left(\frac{\mathbf{d}A}{\mathbf{d}t}A^T\right)$ si sarebbe modificata con le consuete formule di cambiamento di coordinate tra *sistemi di riferimento ortonormali*.

Osserviamo infine una caratteristica fondamentale della matrice $\frac{\mathbf{d}A}{\mathbf{d}t}$. Derivando la relazione (1.2) si ha

$$\frac{\mathbf{d}A}{\mathbf{d}t}A^T + A\frac{\mathbf{d}A^T}{\mathbf{d}t} = \frac{\mathbf{d}A}{\mathbf{d}t}A^T + A\left(\frac{\mathbf{d}A}{\mathbf{d}t}\right)^T = 0\,. \tag{1.7}$$

Ricordando che $AB^T = (BA^T)^T$, possiamo riscrivere la (1.7) come

$$\frac{\mathbf{d}A}{\mathbf{d}t}A^T = -(\frac{\mathbf{d}A}{\mathbf{d}t}A)^T\,, \tag{1.8}$$

ovvero *la matrice* $\frac{\mathbf{d}A}{\mathbf{d}t}A^T$ *è una matrice antisimmetrica*. Indichiamola con

$$\begin{pmatrix}0 & -\omega_3 & \omega_2\\ \omega_3 & 0 & -\omega_1\\ -\omega_2 & \omega_1 & 0\end{pmatrix} \tag{1.9}$$

e riscriviamo la (1.6) come

$$\begin{pmatrix}\dot\xi\\ \dot\eta\\ \dot\zeta\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\dot\xi_O\\ \dot\eta_O\\ \dot\zeta_O\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0 & -\omega_3 & \omega_2\\ \omega_3 & 0 & -\omega_1\\ -\omega_2 & \omega_1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\xi_P\\ \eta_P\\ \zeta_P\end{pmatrix} , \tag{1.10}$$

dove abbiamo indicato con $(\xi_P, \eta_P, \zeta_P)^T$ le componenti in Σ del vettore $\mathbf{P}-\mathbf{O}$.

Se indroduciamo un vettore $\underline{\omega}$ di componenti $(\omega_1, \omega_2, \omega_3)^T$, è immediato verificare che il risultato del prodotto tra la matrice antisimmetrica e il vettore $(\xi_P, \eta_P, \zeta_P)^T$ nella (1.10) ha le stesse componenti del prodotto vettoriale $\underline{\omega}\wedge(\mathbf{P}-\mathbf{O})$. Possiamo quindi riscrivere la (1.10) nella notazione "vettoriale"

$$\dot{\mathbf{P}} = \dot{\mathbf{O}} + \underline{\omega}\wedge(\mathbf{P}-\mathbf{O}) \tag{1.11}$$

detta *formula fondamentale del moto rigido*. Il vettore $\underline{\omega}$ è detto *velocità angolare*.

Nota: La (1.11) non è una relazione vettoriale nel senso che essa mantiene la sua forma solo per cambiamenti di coordinate ortogonali (cioè se solo se si passa da un sistema ortonormale a un altro sempre ortonormale); questo perché sia la definizione di ω sia quella di prodotto vettoriale fanno intervenire la struttura metrica dello spazio euclideo, ovvero la definizione di ortogonalità, e l'orientazione, cioè l'ordine in cui si considerano i versori della terna. Spesso si usa l'espressione "pseudovettoriale" per riferirsi a relazioni che si conservano solo per trasformazioni ortogonali con determinante positivo.

La comparsa del vettore (o "pseudovettore") $\underline{\omega}$ ha un che di artificioso. Tuttavia il suo significato cinematico può essere reso più chiaro.

Per semplificare la trattazione limitiamoci a moti in cui un punto del rigido (che faremo coincidere con **O**) resti fisso: questi moti sono detti *precessioni*, e il punto che resta fisso durante il moto prende il nome di *polo* della precessione.

Se, come abbiamo fatto sopra, fissiamo due sistemi di riferimento S e Σ, avremo ancora una matrice ortogonale $A(t)$ dipendente dal tempo, che ci fornisce le coordinate in Σ in funzioni delle coordinate (costanti) dei punti del rigido nel sistema solidale S.

Consideriamo per iniziare il caso in cui il moto rigido sia una "rotazione uniforme" attorno a un asse fisso (per fissare le idee facciamolo coincidere con l'asse delle ζ nel sistema fisso e con l'asse delle z nel sistema solidale). In questo moto tutti i punti che giacciono sull'asse delle z sono fermi mentre gli altri punti descrivono delle circonferenze con centro sull'asse delle z e su piani a esso perpendicolari. Questa rotazione è uniforme se si descrivono angoli uguali in tempi uguali (nota che tutti i punti descrivono lo stesso angolo!): il rapporto tra l'angolo percorso (con segno) e il tempo impiegato è ciò che si dice "velocità angolare": la matrice $A(t)$ associata a questo moto rigido ha la forma

$$A(t) = \begin{pmatrix} \cos(\omega t) & -\sin(\omega t) & 0 \\ \sin(\omega t) & \cos(\omega t) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

dove ω è ora il rapporto (costante) che abbiamo chiamato velocità angolare. Se fissiamo un valore qualsiasi del tempo la trasformazione che porta il sistema dalla sua configurazione iniziale a quella occupata al tempo fissato si dice una "rotazione finita".

È immediato verificare che il vettore velocità angolare associato al nostro moto dalla costruzione che ci ha portato alla (1.11) è dato da $(0, 0, \omega)$, ovvero ha per direzione l'asse di rotazione per modulo il rapporto tra angolo percorso e tempo di percorrenza e per verso quello delle z crescenti o decrescenti a seconda che la rotazione avvenga concordemente o non con l'orientazione degli assi (ovvero "portando l'asse positivo delle x su quello delle y o viceversa").

La generalizzazione al caso di una rotazione non uniforme è immediata.

Le rotazioni però non esauriscono tutti i possibili moti rigidi. Tuttavia se fissiamo un intervallo tempo e andiamo a vedere in quale configurazione si trova al tempo t un sistema rigido S che all'istante 0 coincideva con il sistema fisso Σ abbiamo il seguente risultato, noto come teorema di Eulero:

Teorema: *Ogni trasformazione rigida dello spazio euclideo tridimensionale che lascia un punto fisso è una rotazione finita attorno a un opportuno asse.*

Questo significa che, qualunque sia stato il moto rigido effettivamente svolto per assumere la configurazione finale, una intera retta di punti solidali è tornata ad occupare la posizione che occupava inizialmente. La differenza con una rotazione è che, mentre nella rotazione i punti dell'asse di rotazione stanno fermi durante tutto il moto, nel caso generale tutti i punti (escuso il polo della precessione) si muovono.

Tuttavia, poiché il teorema vale per un tempo qualsiasi, ad ogni istante del moto c'è una retta del sistema solidale i cui punti occupano la loro posizione iniziale. La differenza con la rotazione sta nel fatto che questa retta non è sempre la stessa la variare di T, e di conseguenza varia sia nel sistema fisso che in quello mobile In altre parole: i punti (solidali) che sono tornati nella loro posizione iniziale al tempo t_1 non sono gli stessi che tornano al tempo t_2, il che implica che la direzione di questa retta è cambiata nel sistema solidale. Inoltre è anche differente la posizione di questa retta nel sistema fisso.

Se prendiamo il limite a un dato istante di queste rette otteniamo la direzione definita dal vettore velocità angolare che compare nella (1.11).

La dimostrazione del teorema di Eulero si può fare per via puramente geometrica ma risulta particolarme facile se torniamo alla nostra descrizione "algebrica" in termini della matrice di trasformazione $A(t)$.

Poiché lavoriamo a un tempo t fissato indichiamo la matrice di trasformazione $A(t)$ semplicemente con A. Da un punto di vista algebrico il fatto che ci siano dei punti lasciati fermi dalla trasforazione associata alla matrice A significa che la matrice A ha un autovettore associato all'autovalore 1 (dobbiamo infatti poter risovere l'equazione $A\mathbf{x} = \mathbf{x}$).

Ci basta quindi dimostrare che A ha il numero reale 1 per autovalore. A è una matrice 3×3, quindi ha sicuramente un autovalore reale. Inoltre, poichè la matrice è ortogonale, la lunghezza di un qualsiasi autovettore associato all'autovalore reale deve essere preservata. Quindi l'autovalore reale deve essere uguale a 1 oppure a -1. Infine ricordiamo che la matrice A ha determinante positivo. Abbiamo quindi tre possibilità:

- tutti e tre gli autovalori sono uguali a 1;
- due autovalori sono uguali a -1 e il terzo è 1;
- o infine (è il caso generico) due autovalori sono complessi coniugati e hanno quindi prodotto positivo; di conseguenza l'autovalore realeè positivo ($= 1$).

Questo conclude la dimostrazione del teorema di Eulero.

1.3 Asse istantaneo di moto, rigate del moto

Vogliamo ora determinare come è fatto il campo di velocità determinato dalla formula (1.11).

Fissiamo un istante t e indichiamo con $\mathbf{v}(\mathbf{P})$ la velocità di un punto solidale $\mathbf{P}$ a questo istante.

Moltiplicando scalarmente la (1.11) per il vettore $\underline{\omega}$ otteniamo

$$\mathbf{v}(\mathbf{P}) \cdot \underline{\omega} = \mathbf{v}(\mathbf{O}) \cdot \underline{\omega} \tag{1.12}$$

che ci dice che *la componente della velocità nella direzione di $\underline{\omega}$ è la stessa per tutti i punti solidali.* Quindi al variare di $\mathbf{P}$, solo la componente di $\mathbf{v}(\mathbf{P})$ ortogonale alla direzione di $\underline{\omega}$ può variare. Mostriamo che esiste una intera retta di punti solidali $\mathbf{Q}$ tali che per la componente di $\mathbf{v}(\mathbf{Q})$ ortogonale a $\underline{\omega}$ è nulla e quindi $\mathbf{v}(\mathbf{Q})$ si riduce a

$$\mathbf{v}(\mathbf{Q}) = \frac{\mathbf{v}(\mathbf{O}) \cdot \underline{\omega}}{\underline{\omega}^2}\underline{\omega} \equiv \mathbf{v}^{\parallel} \tag{1.13}$$

Per tali punti deve valere

$$\underline{\omega} \wedge (\mathbf{Q} - \mathbf{O}) + \mathbf{v}^{\perp}(\mathbf{O}) = 0 \tag{1.14}$$

dove $\mathbf{v}^{\perp}(\mathbf{O}) = \mathbf{v}(\mathbf{O}) - \mathbf{v}^{\parallel}$ è la componente della velocità di $\mathbf{O}$ perpendicolre a $\underline{\omega}$. Possiamo ricrivere l'equazione (1.14) tornando alla rappresentazione matriciale della velocità angolare

$$\begin{pmatrix} 0 & -\omega_3 & \omega_2 \\ \omega_3 & 0 & -\omega_1 \\ -\omega_2 & \omega_1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_Q \\ \eta_Q \\ \zeta_Q \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} v_1^{\perp} \\ v_2^{\perp} \\ v_3^{\perp} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{1.15}$$

dove $(v_1^{\perp}, v_2^{\perp}, v_3^{\perp})^T = \mathbf{v}^{\perp}$ e ξ_Q, η_Q, ζ_Q sono le componenti di $(\mathbf{Q} - \mathbf{O})$. Il sistema di equazioni (1.15) è un sistema lineare non omogeneo la cui matrice ha rango 2 (salvo quando $\underline{\omega} = 0$, verificarlo!) e la condizione $\underline{\omega} \cdot \mathbf{v}^{\perp}$ garantisce che la matrice completa ha ancora rango 2 (verificarlo!). Ne segue che (1.15) ammette soluzione e che le soluzioni sono le coordinate dei punti di una retta nello spazio, avente direzione parallela a $\underline{\omega}$. Questa retta è detta *asse istantaneo del moto*.

In questi punti la velocità assume il minimo modulo e coincide con $\mathbf{v}^parallel$, ovvero lungo la direzione dell'asse di moto stesso. Quindi l'asse del moto "scivola" lungo la sua giacitura. Bisogna però ricordare che i vettori $\underline{\omega}$ e $\mathbf{v}(O)$ sono variabili nel tempo, e quindi anche la posizione dell'asse di moto varia nel tempo e i punti (solidali) che si sull'asse a un istante t_2 sono diversi da quelli che ci si trovavano all'istante t_1, che giustifica l'articolo "istantaneo" nel nome di questa retta.

Al variare del tempo le posizioni assunte dall'asse istantaneo di moto genera due superfici rigate, una nel sistema fisso e una nel sistema solidale, dette rispettivamente rigata fissa e mobile del moto rigido.

Di particolare interesse il caso in cui l'invariante $\mathbf{v}^{\parallel}$ è nullo. In questo caso i punti dell'asse di moto sono "istantaneamente fermi", cioè hanno velocità nulla. Ne segue che la rigata mobile *rotola senza strisciare* sulla rigata fissa e possiamo pensare quindi al moto rigido come "generato" dal rotolamento di queste due superfici, una sull'altra. Questa osservazione è alla base della teoria su cui si basa la costruzione degli *ingranaggi*. In questo caso l'asse viene detto *asse di istantaneo rotazione*, in quanto la distribuzione (istantanea) delle velocià è la stessa di quella che ci sarebbe in un moto di rotazione (in cui l'asse del moto resta fisso).

Nel caso generale si "sommano" i moti di rotazione, dato dalla $\mathbf{v}^{\perp}(\mathbf{P})$ al variare di $\mathbf{P}$, con il moto di "traslazione" dato da $\mathbf{v}^{\parallel}$. Se le caratteristiche del moto, $\underline{\omega}$ e $\mathbf{v}(0)$, restano costanti allora le velocià hanno sempre questa distribuzione e, in particolare, l'asse di moto è sempre lo stesso. Il moto che ne risulta è quindi quello in cui i punti dell'asse si muovono lungo l'asse, mentre gli altri punti li "seguono girando attorno all'asse". Questo moto è detto "elicodale", ed è il moto che ha un bullone mentre fiene avvitato, o un cavatappi mentre entra nel tappo. Nel caso generale questa è la forma della distribuzione di velocità ad ogni istante, ma da un istante all'altro la posizione posizione dell'asse muta. Per questa si parla, per un moto rigido generico, di *atto di moto elicolidale* o *roto-traslatorio*.

1.4 Cinematica relativa: composizione delle velocità

Per procedere abbiamo bisogno di determinare come due sistemi Σ e S in moto tra loro giudichino la velocità di un punto $\mathbf{P}$, che ora supporremo in moto rispetto ad entrambi gli osservatori.

Anche se i termini "fisso" e "mobile" sono arbitrari continueremo a riferirci a Σ come al sistema fisso e a S come al sistema mobile.

Supporemo inoltre di conoscere le caratteristiche del moto di S rispetto a Σ, ovvero i vettori $\mathbf{v}(O)$ e $\underline{\omega}$ (funzioni del tempo) e chiameremo *velocità assoluta*, $\mathbf{v}_{\mathrm{A}}$, e *velocità relativa* , $\mathbf{v}_{\mathrm{R}}$, la velocità del punto $\mathbf{P}$ come giudicata rispettivamente da Σ e S.

Per ricavare il legame tra $\mathbf{v}_{\mathrm{A}}$ e $\mathbf{v}_{\mathrm{R}}$ torniamo alla formula di cambiamento delle coordinate (1.4) di $\mathbf{P}$ nei due sistemi. Deriviamo ancora la (1.4) rispetto al tempo, questa volta tenendo conto che *anche le coordinate di* $\mathbf{P}$ *in* S *variano nel tempo*

$$\frac{\mathbf{d}}{\mathbf{d}t}\begin{pmatrix}\xi\\ \eta\\ \zeta\end{pmatrix} = \frac{\mathbf{d}}{\mathbf{d}t}\begin{pmatrix}\xi_O\\ \eta_O\\ \zeta_O\end{pmatrix} + \frac{\mathbf{d}}{\mathbf{d}t}A(t)\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix} + A(t)\frac{\mathbf{d}}{\mathbf{d}t}\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}\,. \tag{1.16}$$

Il termine a primo membro nella (1.16) sono le componenti della velocità assoluta del punto $\mathbf{P}$ nel sistema Σ. Il terzo addendo a secondo membro rappresenta le componenti, in S, della velocià relativa moltiplicate per la matrice di cambiamento di riferimento: queste sono quindi le componenti in Σ del vettore $\mathbf{v}_{\mathrm{R}}$. I primi due addendi del secondo membro sono gli stessi che comparivano nella formula fondamentale del moto rigido, quindi possiamo riscrivere la (1.16) nella forma "vettoriale"

$$\mathbf{v}_{\mathrm{A}}(\mathbf{P}) = \mathbf{v}_{\mathrm{R}}(\mathbf{P}) + \mathbf{v}_{\mathrm{A}}(\mathbf{O}) + \underline{\omega} \wedge (\mathbf{P} - \mathbf{O})\,. \tag{1.17}$$

La somma $\mathbf{v}_{\mathrm{A}}(\mathbf{O}) + \underline{\omega} \wedge (\mathbf{P} - \mathbf{O})$ rappresenta la velocità che il punto $\mathbf{P}$ avrebbe *se fosse solidale*, ovvero se fosse fermo (anche solo "istantaneamente") rispetto all'osservatore S. Per questa ragione si dà a questo termine il nome di *velocità di trascinamento*, $\mathbf{v}_{\mathrm{T}}$, e si riscrive la (1.17) nella forma

$$\mathbf{v}_{\mathrm{A}}(\mathbf{P}) = \mathbf{v}_{\mathrm{R}}(\mathbf{P}) + \mathbf{v}_{\mathrm{T}}(\mathbf{P})\,, \tag{1.18}$$

che si legge dicendo che la velocità assoluta è uguale alla velocità relativa più la velocità di trascinamento.

Notiamo ora che le considerazioni fatte per la velocità valgono per *qualsiasi quantità vettoriale*, in quanto il termine di differenza tra $\mathbf{v}_{\mathrm{A}}(\mathbf{P})$ e $\mathbf{v}_{\mathrm{R}}(\mathbf{P})$ dipende dalla *variazione dell'orientazione degli assi* S *al variare del tempo*. Useremo i simboli $\left.\frac{\mathbf{d}}{\mathbf{d}t}\right|_{\mathrm{A}}$ e $\left.\frac{\mathbf{d}}{\mathbf{d}t}\right|_{\mathrm{R}}$ per indicare la derivata rispetto al tempo di una qualsiasi quantità vettoriale come giudicata rispettivamente da Σ e S, e le chiameremo ancora *derivata assoluta* e *derivata relativa*.

In accordo con le notazioni introdotte, avremo quindi per un *qualsiasi vettore libero* $\mathbf{X}$

$$\left.\frac{\mathbf{d}\,\mathbf{X}}{\mathbf{d}t}\right|_{\mathrm{A}} = \left.\frac{\mathbf{d}\,\mathbf{X}}{\mathbf{d}t}\right|_{\mathrm{R}} + \underline{\omega} \wedge \mathbf{X} \tag{1.19}$$

che è nota con il nome di *formula di Poisson*.

Esercizio: dimostrare la (1.19).

Nota: con il "senno di poi" ci possiamo rendere conto che nella derivazione della formula di Poisson si utilizza un'ipotesi non espicitata: ad ogni istante i due sistemi di riferimento devono essere in grado di confrontare le variazioni rispetto al tempo di una quantità scalare (le componenti del vettore che si sta derivando) nei due sistemi. Questo è possibile solo se i due sistemi possono "sincronizzare" in ogni momento e *istantaneamente* i loro orologi. Ma ciò è *fisicamente impossibile*, come messo in luce da Einstein nel suo lavoro (del 1905) sulla Relatività Ristretta.

Il fatto che questa ipotesi sia rimasta nascosta per secoli dipende dal fatto che la velocità con cui due osservatori possono scambiarsi delle informazioni è la velocità della luce, che è molto maggiore di qualsiasi velocità in gioco nei fenomeni meccanici macroscopici. L'*errore* che quindi si compie tenendo per buona l'ipotesi di sincronizzazione istantanea degli orologi non è quindi rilevabile nell'ambito delle applicazioni meccaniche ordinarie.

1.5 Composizione di moti rigidi

La relazione tra velocità assoluta e relativa permette di risolvere il seguente problema: siano dati tre osservatori Σ, S e S', con S' in moto sia rispetto a Σ che a S, e siano note le caretteristiche del moto di S rispetto a Σ, $\mathbf{v}(O)$ e $\underline{\omega}$, e di S' *rispetto a* S, $\mathbf{v}_R(\mathbf{O}')$ e $\underline{\omega}'$; derminare le caratteristiche del moto di S rispetto a Σ.
(con $\mathbf{O}'$ si è ovviamente indicato l'origine di S', e si è usata la notazione $\mathbf{v}_R(\mathbf{O}')$ per evidenziare che questa è la velocità di $\mathbf{O}'$ nel sistema S).

Se $\mathbf{P}$ è ora un punto solidale con S', avremo

$$\mathbf{v}_R(\mathbf{P}) = \mathbf{v}_R(\mathbf{O}') + \underline{\omega}' \wedge (\mathbf{P} - \mathbf{O}') \tag{1.20}$$

e, indicando con $\mathbf{v}_A(\mathbf{P})$ la velocità di $\mathbf{P}$ in Σ, otteniamo dalla (1.17)

$$\mathbf{v}_A(\mathbf{P}) = \mathbf{v}_R(\mathbf{O}') + \underline{\omega}' \wedge (\mathbf{P} - \mathbf{O}') + \mathbf{v}_{\mathrm{A}}(\mathbf{O}) + \underline{\omega} \wedge (\mathbf{P} - \mathbf{O})\,. \tag{1.21}$$

che riscriviamo

$$\mathbf{v}_A(\mathbf{P}) = \mathbf{v}_R(\mathbf{O}') + \underline{\omega}' \wedge (\mathbf{P} - \mathbf{O}') + \mathbf{v}_{\mathrm{A}}(\mathbf{O}) + \underline{\omega} \wedge (\mathbf{P} - \mathbf{O}') + \underline{\omega} \wedge (\mathbf{O}' - \mathbf{O})\,. \tag{1.22}$$

Ma la somma

$$\mathbf{v}_R(\mathbf{O}') + \mathbf{v}_{\mathrm{A}}(\mathbf{O}) + \underline{\omega} \wedge (\mathbf{O}' - \mathbf{O})$$

è, a sua volta, la velocità assoluta del punto $\mathbf{O}'$, e quindi possiamo riscrivere la (1.22)

$$\mathbf{v}_A(\mathbf{P}) = \mathbf{v}_A(\mathbf{O}') + (\underline{\omega}' + \underline{\omega}) \wedge (\mathbf{P} - \mathbf{O}')\,, \tag{1.23}$$

che ci dice che il sistema S' compie rispetto a Σ un moto rigido *di velocità angolare* $\underline{\omega}' + \underline{\omega}$.

La (1.22) ci dice quindi che, nella composizione di due moti rigidi, le velocità angolari si sommano. Lo stesso vale se si compongono tre o più moti rigidi.

1.6 Angoli di Eulero

Abbiamo visto che il moto rigido è parametrizzato dai "punti" dello spazio $\mathbf{R}^3 \times SO(3)$. Vogliamo trovare un insieme di sei parametri atti a determinare univocamente la posizione di sistema di riferimento mobile rispetto au riferimento fisso. I primi tre parametri, in $\mathbf{R}^3$, sono, ovviamente, le coordinate dell'origine del sistema solidale. Gli altri tre parametri dovranno determinare l'orientamento degli assi di S rispetto agli assi del sistema Σ, o, equivalentemente, la posizione dei tre versori di S in un sistema Σ' ottenuto traslando Σ in modo da portarne l'origine a coincidere con O. Il moto di S rispetto a Σ' è quindi equivalente a quello di un moto rigido con un punto che resta fisso. Un tale moto prende il nome di *precessione*.

Senza perdere di generalità possiamo fissare le origini dei due riferimenti Σ e S coincidenti con il punto fisso. Avremo quindi $O \equiv \Omega$ e $\dot{O} \equiv 0$.

Vogliamo quindi descrivere la posizione del sistema S rispetto a Σ tramite tre parametri opportuni. Fissiamo quindi una posizione mutua di S e Σ e supponiamo che, in questa configurazione, gli assi dei due siatemi non siano sovrapposti e, in particolare, non coicidano i due assi ζ e z (vedi figura). Vogliamo far vedere che possiamo riportare il sistema “mobile” a coincidere con quello “fisso” mediante tre opportune rotazioni: gli angoli di queste rotazioni forniranno i parametri cercati.

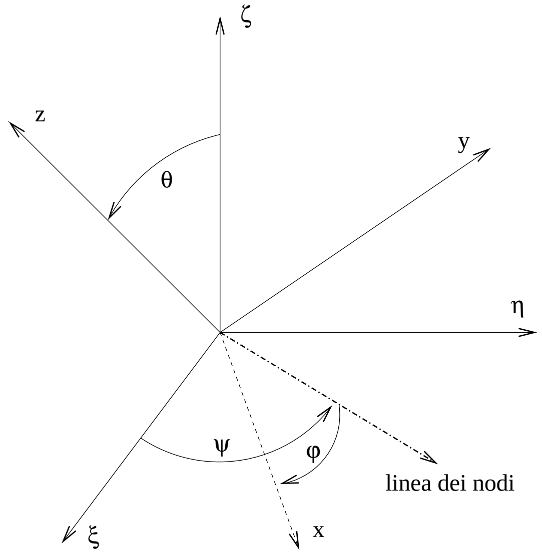

Figura 1.1: Angoli di Eulero

Poiché gli assi ζ e z non coincidono, i piano $\zeta = 0$ e $z = 0$ si intesecano in una retta detta *linea dei nodi*. Sia $\mathbf{n}$ il versore di questa retta, orientato in modo che la terna $\mathbf{k}$, $\mathbf{n}$ e $\mathbf{e}_3$ (cioè i versori dell’asse z, della linea dei nodi, e dell’asse delle ζ) sia positivamente orientata.

Indichiamo ora con θ, ϕ e ψ i tre angoli formati rispettivamente dalle coppie di versori $(\mathbf{k}, \mathbf{e}_3)$, $(\mathbf{n}, \mathbf{i})$ e $(\mathbf{e}_1, \mathbf{n})$ (in quest’ordine). Questi angoli prendono il nome collettivo di *angoli di Eulero* e i nomi ripettivi: angolo di *nutazione* θ, angolo di *rotazione propria* ϕ e angolo di *precessione* ψ.

Le rotazioni sono così definite:

1. una rotazione di un angolo $-\phi$ attorno all’asse delle z, che porta l’asse delle x a coincidere con la linea dei nodi;

2. una rotazione di un angolo $-\psi$ attorno all’asse delle ζ, che porta la linea dei nodi a coincidere con l’asse delle ξ, e quindi con l’asse delle x;

3. una rotazione di un angolo $-\theta$ attorno alla linea dei nodi, che porta l’asse delle z a coincidere con l’asse delle ζ (e di conseguenza l’asse delle y con l’asse delle η).

Si noti che gli angoli di Eulero risultano indefiniti per tutte quelle posizioni di S in cui gli assi z e ζ risultano sovrapposti. Questo “difetto” è inevitabile, qualsiasi sia il sistema di parametri si scelga per determinare la posizione di S, in quanto l’insieme

$SO(3)$, i cui punti sono in corrispondenza 1-1 con le posizioni di S, non ammette sistemi coordinate globali (come accade p.e. per la superficie di una sfera).

In base alla definizione degli angoli di Eulero è possibile costruire la matrice A di passaggio dal sistema S al sistema Σ in funzione dei tre angoli di Eulero, componendo le tre rotazioni. Da essa è poi si ricava l'espressione di $\underline{\omega}$ tramite gli angoli di Eulero.

E' possibile comunque trovare direttamente quest'espressione di $\underline{\omega}$ ricorrendo alla formula di addizione delle velocità angolari per la composizione di moti rigidi. Da come abbiamo definito gli angoli di Eulero risulta chiaro che la generica trasformazione che porta da Σ a S è ottenuta tramite le tre rotazioni che abbiamo descritte, effettuate ruotando di θ attorno alla linea dei nodi, di ψ attorno all'asse ζ e di ϕ attorno all'asse z. Ricordando la forma della velocità angolare in una rotazione si ha la semplice espressione

$$\underline{\omega} = \dot{\theta}\,\mathbf{n} + \dot{\psi}\,\mathbf{e}_3 - \dot{\phi}\,\mathbf{k}\,, \tag{1.24}$$

dove il "punto" indica le derivate rispetto al tempo degli angoli. La (1.24) è però un'espressione "ibrida" perché non ci dà le componenti di $\underline{\omega}$ né nel sistema Σ, né nel sistema S (ha un altro difetto: mentre $\mathbf{n}$ è perpendicolare sia a $\mathbf{e}_3$ che a $\mathbf{k}$, questi ultimi due versori non sono in genere perpendicolari tra loro, quindi il modulo di $\underline{\omega}$ non può essere ottenuto da (1.24) semplicemente sommando i quadrati delle tre derivate degli angoli)

E' tuttavia facile ottenere l'espressione di $\underline{\omega}$ in entrambi i riferimenti Σ e S, osservando che

$$\mathbf{n} = \cos\psi\,\mathbf{e}_1 + \sin\psi\,\mathbf{e}_2 \tag{1.25}$$
$$\mathbf{n} = \cos\phi\,\mathbf{i} - \sin\phi\,\mathbf{j} \tag{1.26}$$
$$\mathbf{k} = \sin\theta\,(\sin\psi\,\mathbf{e}_1 - \cos\psi\,\mathbf{e}_2) + \cos\theta\,\mathbf{e}_3 \tag{1.27}$$
$$\mathbf{e}_3 = \sin\theta\,(\sin\phi\,\mathbf{i} + \cos\phi\,\mathbf{j}) + \cos\theta\,\mathbf{k} \tag{1.28}$$

(attenzione ai segni).

Esercizio: Calcolare il modulo di $\underline{\omega}$.

1.7 Cinematica relativa: l'accelerazione

Vediamo infine come viene giudicata da due osservatori diversi l'accelerazione di un punto in movimento rispetto a entrambi.

Per trovare la relazione che lega le due accelerazioni, basta derivare la formula (1.17) che lega la velocità relativa alla velocità assoluta tenendo presente che l'accelerazione giudicata da Σ (che chiameremo assoluta) è la derivata in Σ della velocità giudicata da Σ, mentre l'accelerazione giudicata da S (che chiameremo relativa) è la derivata in S della velocità giudicata da S

Avremo quindi

$$\mathbf{a}_{\mathrm{A}}(\mathbf{P}) = \left.\frac{\mathbf{d}}{\mathbf{d}t}\right|_{\mathrm{A}} \mathbf{v}_{\mathrm{A}}(\mathbf{P}) = \left.\frac{\mathbf{d}}{\mathbf{d}t}\right|_{\mathrm{A}} (\mathbf{v}_{\mathrm{R}}(\mathbf{P}) + \mathbf{v}_{\mathrm{A}}(\mathbf{O}) + \underline{\omega} \wedge (\mathbf{P} - \mathbf{O}))\ . \tag{1.29}$$

Calcoliamo la derivata a secondo membro utilizzando la formula di Poisson:

$$\mathbf{a}_{\mathrm{A}}(\mathbf{P}) = \mathbf{a}_{\mathrm{R}}(\mathbf{P}) + \underline{\omega} \wedge \mathbf{v}_{\mathrm{R}}(\mathbf{P}) + \left.\frac{\mathbf{d}}{\mathbf{d}t}\right|_{\mathrm{A}} \mathbf{v}_{\mathrm{A}}(\mathbf{O}) + \left.\frac{\mathbf{d}}{\mathbf{d}t}\right|_{\mathrm{A}} (\underline{\omega} \wedge (\mathbf{P} - \mathbf{O}))\ , \tag{1.30}$$

dove è comparsa l'accelerazione relativa $\mathbf{a}_{\mathrm{R}}(\mathbf{P}) = \frac{\mathbf{d}}{\mathbf{d}t}\big|_{\mathrm{R}}\, \mathbf{v}_{\mathrm{R}}(\mathbf{P})$ di $\mathbf{P}$ e l'accelerazione assoluta dell'origine di S. Deriviamo infine l'ultimo addendo, sempre usando la formula di Poisson:

$$\left.\frac{\mathbf{d}}{\mathbf{d}t}\right|_{\mathrm{A}} (\underline{\omega} \wedge (\mathbf{P} - \mathbf{O})) = \left(\left.\frac{\mathbf{d}}{\mathbf{d}t}\right|_{\mathrm{A}} \underline{\omega} \right) \wedge (\mathbf{P} - \mathbf{O}) + \underline{\omega} \wedge \left(\left.\frac{\mathbf{d}}{\mathbf{d}t}\right|_{\mathrm{A}} (\mathbf{P} - \mathbf{O}) \right) \quad (1.31)$$

$$= \dot{\underline{\omega}} \wedge (\mathbf{P} - \mathbf{O}) + \underline{\omega} \wedge (\mathbf{v}_R(\mathbf{P})) + \underline{\omega} \wedge (\underline{\omega} \wedge (\mathbf{P} - \mathbf{O}))\ , \quad (1.32)$$

dove abbiamo indicato semplicemente con $\dot{\underline{\omega}}$ la derivata della velocità angolare poiché *è la stessa nei due sistemi di riferimento*, cosa che segue immediatamente dalla formula di Poisson, e abbiamo sostituito il simbolo della velocità relativa al posto di $\frac{\mathbf{d}}{\mathbf{d}t}\big|_{\mathrm{R}} (\mathbf{P} - \mathbf{O})$. Possiamo riunire questi pezzi, e otteniamo il legame cercato tra le due accelerazioni:

$$\mathbf{a}_{\mathrm{A}}(\mathbf{P}) = \mathbf{a}_{\mathrm{R}}(\mathbf{P}) + \mathbf{a}_{\mathrm{A}}(\mathbf{O}) + \dot{\underline{\omega}} \wedge (\mathbf{P} - \mathbf{O}) + \underline{\omega} \wedge (\underline{\omega} \wedge (\mathbf{P} - \mathbf{O})) + 2\, \underline{\omega} \wedge \mathbf{v}_R(\mathbf{P}) \quad (1.33)$$

La (1.33) va letta osservando che il secondo, terzo e quarto termine della somma sono presenti *anche quando il punto* $\mathbf{P}$ *è solidale con* S; per questa ragione la loro somma prende il nome di accelerazione di trascinamento, $\mathbf{a}_{\mathrm{T}}(\mathbf{P})$. Infine il termine $2\, \underline{\omega} \wedge \mathbf{v}_R(\mathbf{P})$, indicato generalmente con il simbolo $\mathbf{a}_{\mathrm{C}}(\mathbf{P})$, è dovuto alla correzione necessaria per il diverso modo che hanno i due sistemi di giudicare sia la variazione della velocità relativa sia la variazione della velocità di trascinamento. Questo termine prende il nome di *accelerazione complementare* o di Coriolis e la (1.33) si scrive nella forma compatta

$$\mathbf{a}_{\mathrm{A}} = \mathbf{a}_{\mathrm{R}} + \mathbf{a}_{\mathrm{T}} + \mathbf{a}_{\mathrm{C}}\,. \quad (1.34)$$

L'importanza di questa relazione è dovuta al fatto che molto spesso i fenomeni meccanici sono osservati da sistemi di riferimento non inerziali.

Esempi noti sono la deviazione dalla verticale nella caduta di un grave[7], la deviazione dalla direzione dei meridiani degli alisei, e il moto del pendolo di Foucault.

1.8 Appendice

Mostriamo che una trasformazione rigida dello spazio euclideo deve essere affine, ovvero deve avere la forma

$$F(X) = X_0 + A(X - X_0) \quad (1.35)$$

dove A è una trasformazione lineare ortogonale e X_0 un punto fissato dello spazio.

Ricordiamo che per trasformazione rigida si intende una qualsiasi applicazione F dello spazio euclideo in sé tale che

$$d(F(X), F(Y)) = d(X, Y)\ \forall X, Y \quad (1.36)$$

[7]Nota che nella direzione della verticale, che è quella del filo a piombo, è compresa oltre alla forza di gravità, un termine centrifugo dovuto all'accelerazione di trascinamento della terra. Quando un grave cade, il termine di accelerazione complementare fa deviare la sua traiettoria dalla verticale. Se si guarda al fenomeno dal punto di vista di un osservatore posto al di fuori della terra, questa deviazione è l'ovvia conseguenza del fatto che nel tempo impiegato nella caduta, l'osservatore (la terra) ha ruotato spostando il piede della verticale del punto di partenza verso oriente. L'osservatore solidale con la terra vedra quindi deviare il grave verso occidente. Tuttavia questo effetto è molto piccolo, e praticamente inosservabile, nella caduta di un grave da altezza ordinarie.

dove $d(X,Y) = \sqrt{(X-Y)\cdot(X-Y)}$ indica la distanza tra i punti X e Y. Osserviamiamo per prima cosa che (1.36) è vera se e solo se si ha

$$(F(X)-F(Y))\cdot(F(X)-F(Y)) = (X-Y)\cdot(X-Y) \quad \forall X,\, Y \tag{1.37}$$

Dalla relazione (1.37) è abbastanza semplice far vedere che se F ha la forma (1.35), ovvero se è affine, allora $A \in SO(n)$.

Resta da verificare che la F è affine. Scegliamo un punto O dello spazio, poniamo $X_0 = F(O)$ e indichiamo con lettere minuscole i vettori $x = X - O$.

Dalla (1.37) abbiamo che

$$(F(X)-X_0)\cdot(F(X)-X_0) = x\cdot x \quad \forall x \tag{1.38}$$

Poniamo $g(x) = F(X) - X_0$. Avremo che F è affine se e solo se g è un'applicazione lineare. Dalla (1.38) abbiamo che g soddisfa la condizione

$$g(x)\cdot g(x) = x\cdot x \quad \forall x\,. \tag{1.39}$$

Inoltre, poiché

$$g(x) - g(y) = F(X) - F(Y) \quad \forall x,\, y \tag{1.40}$$

($y = Y - O$), dalla (1.37) segue che

$$(g(x)-g(y))^2 = (x-y)^2\, \forall x,\, y \tag{1.41}$$

Confrondando la (1.39) e la (1.41) (sviluppando i quadrati) si ha

$$g(x)\cdot g(y) = x\cdot y \quad \forall x,\, y \tag{1.42}$$

La (1.42) ci dice che la g è lineare: infatti, fissato y abbiamo

$$\begin{aligned} g(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2)\cdot g(y) &= (\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2)\cdot y \\ = \alpha_1 x_1\cdot y + \alpha_2 x_2 \cdot y &= (\alpha_1 g(x_1) + \alpha_2 g(x_2))\cdot y \quad \forall y \end{aligned} \tag{1.43}$$

ovvero

$$g(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2) = \alpha_1 g(x_1) + \alpha_2 g(x_2)\,. \tag{1.44}$$