CORSO DOTTORATO "Grafi pesati"

prima di iniziare il corso vedi [illegible] pagine due schemi def e prime notazione

Considereremo sempre grafi __finiti__ e __semplici__

__Notazioni__ G grafo

$E(G) = \{\text{edges di } G\} \subset \binom{V(G)}{2}$

$V(G) = \{\text{vertici di } G\}$, $V^{(d)} = \{v \in V(G) \mid \deg v = d\}$

$v \in V(G)$, $\deg v = \#$ lati incidenti v

$L(G) = \{v \in V(G) \mid \deg v = 1\}$

$[n] = \{1, \ldots, n\}$

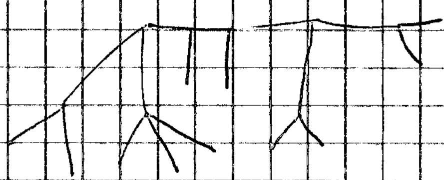
$\binom{S}{k}$ = k sottoinsiemi di S

$T|_S$ dove T albero $S \subset V(T)$ è il più piccolo sottoal. $\supset S$

__Definizione__ T albero. Siano $i, j \in L(T)$. Si dice che i e j sono __vicini__ se il cammino fra i e j contiene al più un vertice di grado ≥ 3. Un __cherry__ di un albero è un sottoinsieme C di $L(T)$ t.c. $\forall i, j \in C$ i, j sono vicini. Si dice __completo__ se non è contenuto in nessun altro cherry. L'unico vertice di grado ≥ 3 nel cammino fra due fogli di un cherry si dice __piccolo__.

Il cammino fra uno foglio di un cherry e il piccolo si dice __twig__.

__Esempi__



__Definizione__ Un grafo pesato $\mathcal{G} = (G, w)$ è un grafo con una funzione $w : E(G) \to \mathbb{R}$. Si dice posit. pesato se è a valori in $\mathbb{R}_{>0}$

non negat. pesato " in $\mathbb{R}_{\geq 0}$

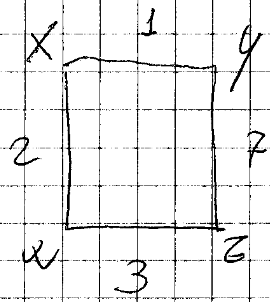
__Definizione__ $\mathcal{G} = (G, w)$ grafo non neg. pesato. Siano $i_1, \ldots, i_k \in V(G)$

$$D_{\{i_1 \ldots i_k\}}(\mathcal{G}) = \min\{ \underbrace{w(R)}_{\sum_{e \in E(R)} w(e)} \mid R \text{ grafo connesso con } V(R) \supset i_1 \ldots i_k \}$$

scrivo $D_{i_1 \ldots i_k}$

k-pesi (multipesi)

Es



$D_{xz} = 5$ $\qquad$ $D_{wz} = 3$

$D_{xy} = 1$ $\qquad$ $D_{wx} = 5$

$D_{yz} = 6$ $\qquad$ $D_{wy} = 3$

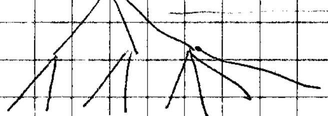
$D_{xyw} = 3$ ...

oss Un G che realizza min è un albero se G pond pesato

" " può essere pure albero " nonneg pesato

Problemi Ricostruire G dai multipesi o da sottofamiglie es 2-pesi? è possibile e se sì come si fa? Quali sono le famiglie che sono famiglie di multipesi (k-pesi) di grafi albero?
Fissato famiglia se c'è più di grafo che lo realizza qual è quello con peso minimo? Studiato soprattutto caso $k = 2$.

Motivazione Grafi pesati = reti ferroviarie, reti di comunicazione....
Filogenetica: l'evoluzione è rappresentata da alberi in cui all'inizio metto la prima specie, la specie progenitrice ...



peso = dist di Hamming delle seq di DNA

BASI AZOTATE:

Adenina	A
Timina	T
Citosina	C
Guanina	G

che formano le molecole del DNA

dalle dist fra le foglie ⇝ albero

Esempio

⇝ Mat

Esercizio 1

$$\begin{array}{c|ccccc} & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ \hline 1 & 0 & 17 & 15 & 19 & 20 \\ 2 & 17 & 0 & 8 & 16 & 17 \\ 3 & 15 & 8 & 0 & 14 & 19 \\ 4 & 19 & 16 & 14 & 0 & 15 \\ 5 & 20 & 17 & 15 & 15 & 0 \end{array}$$

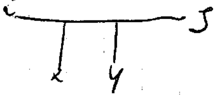
Trovare un albero pesato τ con $L(T) = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ t.c.

$$D_{ij}(\tau) = D_{ij} \qquad \forall\, ij \in [5]$$

OSS - SUGGERIMENTO Se τ albero pesato e $i\,j$ foglie vicine allora

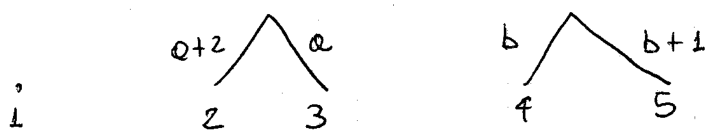
$$D_{ix} - D_{jx}$$

non dipende da $x \in L(\tau)$ e è la differenza dei pesi dei twigs di i e j. Vale anche il viceversa, cioè se $i\,j$ foglie t.c. $D_{ix} - D_{jx}$ non dipende da x allora i e j vicini infatti se non lo fossero



$D_{ix} - D_{jx} \neq D_{iy} - D_{jy}$

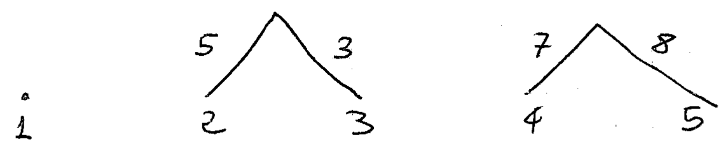
Quindi 2 e 3 sono vicini e 4 e 5 sono vicini e se a è il peso del twig di 3, $a+2$ è il peso del twig di 2; se b è il peso del twig di 4, $b+1$ è il peso del twig di 5.



Inoltre $a + 2 + a = D_{23} = 8 \Rightarrow 2a + 2 = 8 \Rightarrow a = 3$

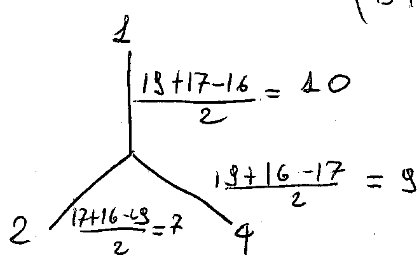
$b + 1 + b = D_{45} = 15 \Rightarrow b = 7$

Quindi

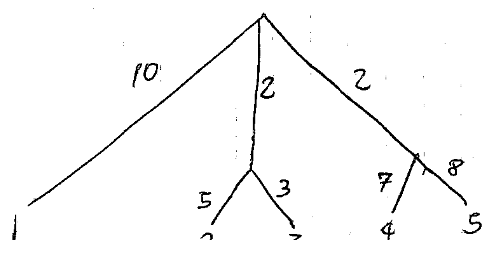


La matrice associata a $\tau|_{124}$ è $\begin{pmatrix} 0 & 17 & 19 \\ 17 & 0 & 16 \\ 19 & 16 & 0 \end{pmatrix}$

Quindi $\tau|_{124}$ è



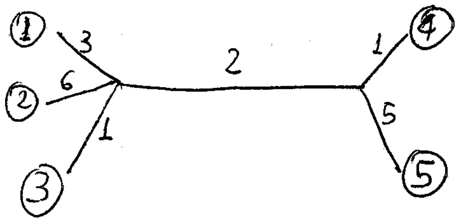
Quindi τ è



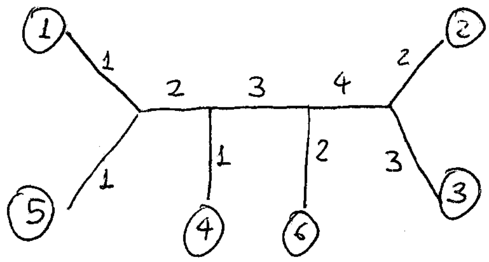
Esercizio 2 Sia $D = \begin{pmatrix} 0 & 9 & 4 & 6 & 10 \\ 9 & 0 & 7 & 9 & 13 \\ 4 & 7 & 0 & 4 & 8 \\ 6 & 9 & 4 & 0 & 6 \\ 10 & 13 & 8 & 6 & 0 \end{pmatrix}$. Trovare T albero pesato posit t.c. $D_{ij}(T) = D_{ij}$ $\forall\, i,j \in \{1..5\}$

Esercizio 3 Sia $D = \begin{pmatrix} 0 & 12 & 13 & 4 & 2 & 8 \\ 12 & 0 & 5 & 10 & 12 & 8 \\ 13 & 5 & 0 & 11 & 13 & 9 \\ 4 & 10 & 11 & 0 & 4 & 6 \\ 2 & 12 & 13 & 4 & 0 & 8 \\ 8 & 8 & 9 & 6 & 8 & 0 \end{pmatrix}$ " " $\forall\, i,j \in \{1..6\}$

Soluzione Esercizio 2



Soluzione Esercizio 3



---

	alberi	grafi
non negat	$w(T\|_{i_1 \dots i_k})$	$\min\left\{ w(R) \mid R \text{ sottografo connesso con } V(R) \supseteq i_1 \dots i_k \right\}$
generico	//	

2-peri

Teorema di Buneman (Simoes-Pereira Zaretskii)

Sia $\{D_I\}_{I \in \binom{[m]}{2}}$ una famiglia in $\mathbb{R}_{\geq 0}$ tale che valgano le disuguaglianze triangolari, cioè $D_{ij} + D_{jk} \leq D_{ik}$ $\forall i\, j\, k \in [m]$

Esiste un albero pesato non negativamente $\mathcal{T} = (T, w)$ con $L(T) = [m]$ tc $D_I(\mathcal{T}) = D_I$ $\forall I \in \binom{[m]}{2}$ $\Longleftrightarrow$

$\forall i\, j\, k\, e$ distinti in $[m]$ si ha che il massimo in

$$\{ D_{ij} + D_{ke} \,,\, D_{ik} + D_{je} \,,\, D_{ie} + D_{jk} \}$$

è raggiunto almeno due volte. — 4-points condition

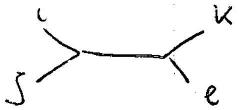
<u>oss</u> Se permetto $i\, j\, k\, e$ coincidono, la disug triang deriva da 4-points cond. (ponendo $D_{ii} = 0$)

<u>Dim</u>

$\Rightarrow$ Supponiamo $\exists$ $\mathcal{T} = (T, w)$ albero pesato non negat con $L(T) = [m]$ e tc $D_I(\mathcal{T}) = D_I$ $\forall I$

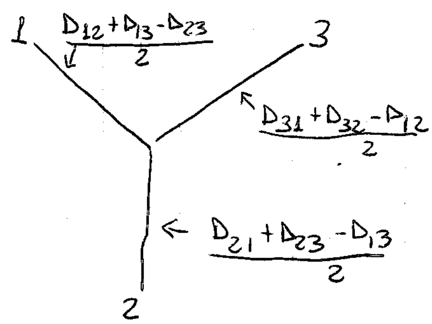
Siano $i\, j\, k\, e$ distinti in $[m]$. Considero l'albero $T|_{ijke}$.

è così 

ad esempio  allora $D_{ik} + D_{je} = D_{ie} + D_{jk} \geq D_{ij} + D_{ke}$

$\Leftarrow$ Per induzione su m

<u>$m=3$</u>



<u>$m-1 \Rightarrow m$</u>

Siano $x, y, z \in [m]$ tc $D_{xz} + D_{yz} - D_{xy} = \max_{ijk} \{ D_{ij} + D_{ik} - D_{jk} \}$

Per ipotesi induttiva esiste un albero pesato $\mathcal{A} = (A, w)$ con $L(A) = [m] - \{x\}$ e tc $D_I(A) = D_I$ $\forall I \in \binom{[m]-\{x\}}{2}$

Posso supporre che in A non ci siano vertici di grado 2.

Sia e l'edge in A adiacente a y. Siano:

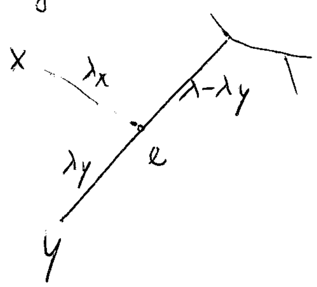
$\lambda = w(e)$

$$\lambda_x \doteq \frac{D_{xy} + D_{xz} - D_{yz}}{2}$$

$$\lambda_y \doteq \frac{D_{yx} + D_{yz} - D_{xz}}{2}$$

Costruisco $\mathcal{T} = (T, w)$ a partire da A nel modo seguente:

aggiungo ad A un edge con vertici x e un pto di e coi pesi come in figura

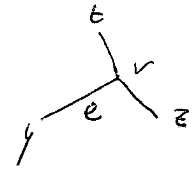


Il fatto che λ_x e λ_y siano ≥ 0 segue dalla disug triangolare.

Bisogno dimostrare che $\lambda - \lambda_y \geq 0$ e che $D_I(\mathcal{T}) = D_I \quad \forall I \in \binom{[n]}{2}$

Sia $t \in [n] - \{x, y, z\}$ tc $\lambda = \frac{D_{yt} + D_{yz} - D_{tz}}{2}$

(basta prendere t tc



infatti l'altro vertice v di e oltre y ha grado ≥ 3, prendo t in un ramo che parte da v e non contenuto nel cammino da y a z)

Per come ho scelto x y z ho che

$$\cancel{D_{xz}} + D_{yz} - D_{xy} \geq \cancel{D_{xz}} + D_{iz} - D_{xi} \qquad i \leftrightarrow y$$

$$D_{xz} + \cancel{D_{yz}} - D_{xy} \geq D_{iz} + \cancel{D_{yz}} - D_{iy} \qquad i \longleftrightarrow x$$

$$\Longrightarrow \quad D_{yz} + D_{xi} \geq D_{xy} + D_{iz}$$

$$D_{xz} + D_{iy} \geq D_{xy} + D_{iz}$$

$\Longrightarrow$ (4-points cond)

$$D_{yz} + D_{xi} = D_{xz} + D_{iy} \geq D_{xy} + D_{iz}$$

$\circledast$ $\star$

$$\lambda - \lambda_y = \frac{1}{2}\left(D_{yt} + \cancel{D_{yz}} - D_{tz} - \cancel{D_{yz}} - D_{yx} + D_{xz} \right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(D_{yt} + D_{xz} - D_{tz} - D_{xy} \right) \underset{\text{da} \star}{\geq} 0$$

$$D_{xy}(\mathcal{T}) = \lambda_x + \lambda_y = D_{xy}$$

$$D_{xi}(\mathcal{T}) = D_{yi}(\mathcal{T}) - \lambda_y + \lambda_x = \qquad \forall i \in [n] - \{x\}$$

$$= D_{yi}(\mathcal{R}) + D_{xz} - D_{yz} =$$

$$\underset{⊛}{=} D_{yi} + D_{xi} - D_{yi} = D_{xi}$$

$$D_{ij}(\mathcal{T}) = D_{ij}(\mathcal{R}) = D_{ij} \qquad \forall i j \in [n] - x$$

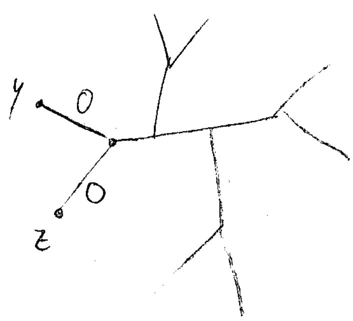
QED

OSS ℓ-nn treelike $\Leftrightarrow$ p-treelike

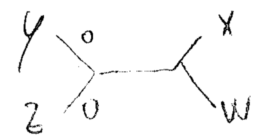
$\Leftarrow$ ok

$\Rightarrow$ ok ma solo se permetto che un vertice sia multilabellato

pure se metto l'ipotesi $D_{ij} > 0$ $\forall i j$



$$D_{yx} + D_{zw} = D_{yw} + D_{xz} \geq D_{yz} + D_{xw}$$



Teorema di Hakimi-Yau Sia $n \in \mathbb{N}$ $n \geq 2$

Sia $\{D_I\}_{I \in \binom{[n]}{2}}$ una famiglia in $\mathbb{R}_{>0}$

Esiste $\mathcal{G} = (G, w)$ grafo pesato positiv. con $[n] \subset V(G)$ t.c. $D_I(\mathcal{G}) = D_I$ $\forall I \in \binom{[n]}{2}$

$\iff$ $\forall\, ijk$ distinti in $[n]$ $D_{ij} \leq D_{ik} + D_{kj}$.

Dim

$\Rightarrow$ Tesi $\left\{ D_{ij}(\mathcal{G}) \leq D_{ik}(\mathcal{G}) + D_{kj}(\mathcal{G}) \right.$ $\forall\, ijk \in [n]$

$D_{ij}(\mathcal{G}) = \min\{w(R) \mid R \text{ grafo cammino} \ni ij\}$

Se p "realizza" $D_{ik}(\mathcal{G})$ cioè $w(p) = \min\{w(R) \mid R \text{ grafo cammino} \ni ik\}$ e p

e p' $D_{kj}(\mathcal{G})$

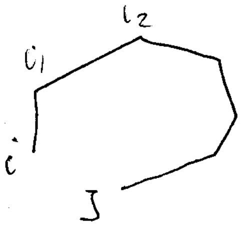
allora $p \cup p'$ è un grafo cammino $\ni ij$

$\Rightarrow$ $w(p) + w(p') \geq w(p \cup p') \geq D_{ij}(\mathcal{G})$

$\Leftarrow$ $G \doteq K_n$ $w(\{ij\}) = D_{ij}$ $\mathcal{G} = (G, w)$

Tesi $\left\{ D_{ij}(\mathcal{G}) = D_{ij} \right.$

Devo vedere che ogni altro cammino fra i e j ha peso $\geq$ di D_{ij}



Per disug triang

$\overbrace{w(i\, i_1)}^{D_{ii_1}} + \overbrace{w(i_1 i_2)}^{D_{i_1 i_2}} + \dots + w(i_k j)$

$\geq D_{i i_2} + D_{i_2 i_3} + \dots + D_{i_k j}$

$\geq D_{i i_3} + D_{i_3 i_4}$

$\dots \geq D_{ij}$

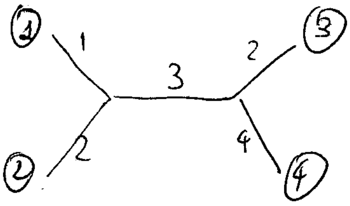
$\square$

Analog se famiglia in $\mathbb{R}_{\geq}$

$\mathcal{G}$ pesato non negat

<u>OSS</u> Possono esistere più grafi pesati positivamente che danno la stessa famiglia di 2-pesi.

<u>Esempio</u>

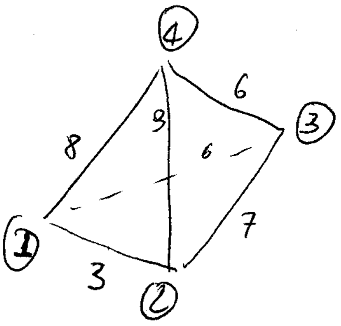


$D_{12} = 3$ $\quad D_{23} = 7$

$D_{13} = 6$ $\quad D_{24} = 9$

$D_{14} = 8$ $\quad D_{34} = 6$

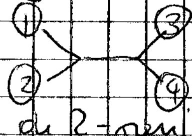
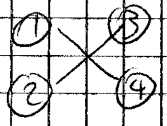
grafo completo K_4 con peso di ij $= D_{ij}$

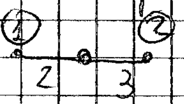
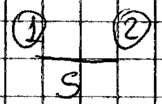
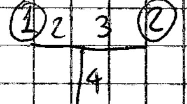
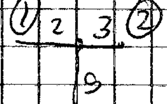


Più in generale la famiglia di 2-pesi di un albero è sempre realizzata anche da un grafo non albero (il grafo completo con peso di $\{i,j\}$ uguale a D_{ij})

Teorema "Le distanze determinano gli alberi positivi pesati"

Sia $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$.
Siano $\mathcal{T}_1 = (T_1, w_1)$ e $\mathcal{T}_2 = (T_2, w_2)$ due alberi pesati positivamente, con $V^1(T_i)$, $V^2(T_i) \subset [n] \subset V(T_i)$ per $i = 1, 2$.
Allora $\mathcal{T}_1 \cong \mathcal{T}_2 \iff D_{ij}(\mathcal{T}_1) = D_{ij}(\mathcal{T}_2) \quad \forall i, j \in [n]$

OSS • Se chiedevo pesi non negativi e $[n] = L(\mathcal{T}_i)$, l'enunciato non era più vero ad esempio gli alberi   con tutti i pesi nulli hanno la stessa famiglia di 2-pesi.
Dovrei contrarre gli edges con peso 0 per avere l'unicità ma allora qualche foglia diventa una non foglia.

- Ugualmente se non chiedo che i vertici di grado 2 siano tutti labellati non si ha più l'unicità es   hanno la stessa famiglia di 2-pesi
- Idem per i vertici di grado 1: es   " "

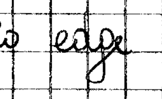
Dim

$\Rightarrow$ OVVIO

$\Leftarrow$ Per induzione su n

$n = 2$

Dato che $V^1(T_i), V^2(T_i) \subset [2]$ (per ipotesi) e dato che un albero che non sia costituito da un solo vertice ha almeno 2 foglie, si deve avere che sia T_1 che T_2 sono l'albero dato da un solo edge e i suoi due vertici



$\Rightarrow T_1 \cong T_2$

Il peso di tale edge deve essere $D_{12}(\mathcal{T}_1)$ in $\mathcal{T}_1$
$ \quad \parallel$
$ D_{12}(\mathcal{T}_2)$ in $\mathcal{T}_2$

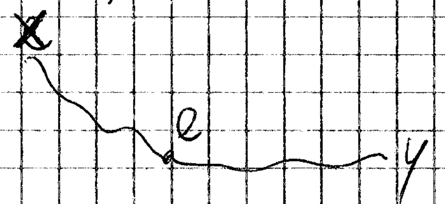
Dato che $D_{12}(T_1) = D_{12}(T_2) \Rightarrow T_1 \cong T_2$

$n-1 \Rightarrow n$

OSS Se l è una foglia di T_1, è anche una foglia di T_2 e viceversa

Precisamente:

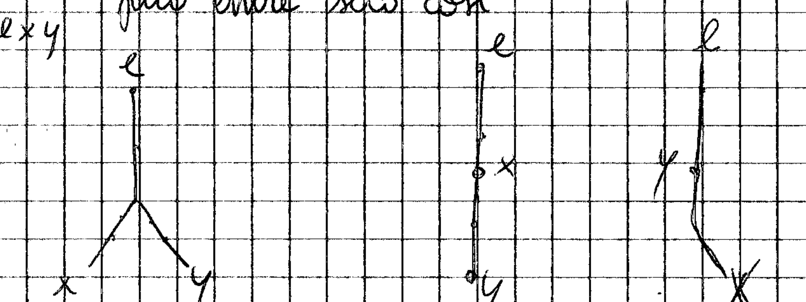
Se l è una foglia di T_1, allora $l \in [n]$ (dato che $V^1(T_1) \subset [n]$), quindi l è anche un vertice di T_2. Supponiamo per assurdo che l non sia una foglia di T_2. Allora in T_2 esistono due foglie x, y t.c. $l \in path(x,y)$.



Dato che $V^1(T_2) \subset [n]$, si ho $x, y \in [n]$ e dato che $l \in path(x,y)$, si ho

$$D_{xl}(T_2) + D_{ly}(T_2) = D_{xy}(T_2) \qquad (1)$$

D'altra parte in T_1, l è una foglia quindi l è una foglia in $T_1|_{lxy}$, quindi $T_1|_{lxy}$ può essere solo così



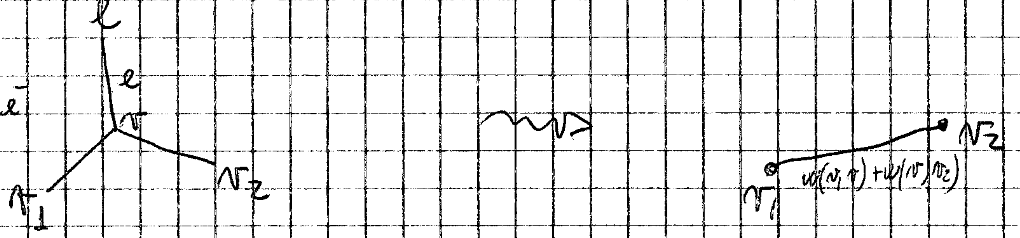
In tutti e tre casi $D_{xl}(T_1) + D_{ly}(T_1) \neq D_{xy}(T_1)$ (2)

$\rightsquigarrow$ ASSURDO (Dato che $D_{ij}(T_1) = D_{ij}(T_2)$ $\forall i,j$, (1) e (2) sono in contrasto)

Siano τ_1' e τ_2' gli alberi ottenuti da τ_1 e τ_2 rispettivamente nel modo seguente: consideriamo τ_1

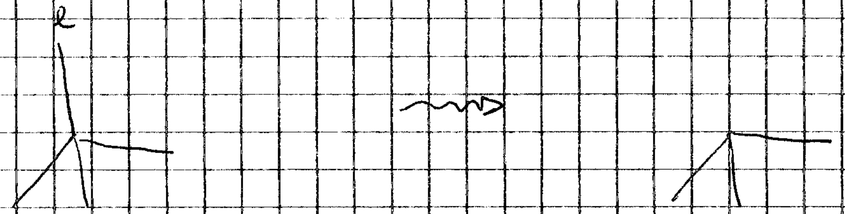
- elimino l e l'edge e adiacente a l
- inoltre se il vertice v di e diverso da l ha grado 3 in T_1 e i suoi edges adiacenti sono $\{v, v_1\}$, $\{v, v_2\}$, sostituisco a tali edges un edge solo $\{v_1, v_2\}$ con peso la somma dei pesi di $\{v, v_1\}$ e $\{v, v_2\}$

se T_1 è



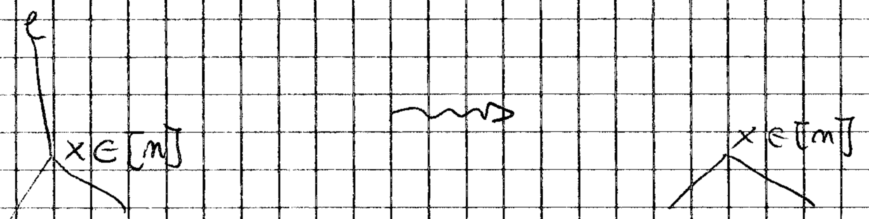
T_1'

se T_1 è



T_1'

se T_1 è



T_1'

Analogamente per τ_2.

τ_1' e τ_2' sono due alberi pesati positivamente, t.c. $[n]-\{l\} \subset V(T_i')$ $i=1,2$ (cioè con $n-1$ labels) e con $V^1(T_i'), V^2(T_i') \subset [n]-\{l\}$ (cioè con tutti i vertici di grado 1 e 2 labellati). Inoltre $\forall\, i,j \in [n]-\{l\}$ si ha

$$D_{ij}(\tau_1') = D_{ij}(\tau_1) = D_{ij}(\tau_2) = D_{ij}(\tau_2')$$

Quindi per ipotesi induttiva $\tau_1' \cong \tau_2'$ $= \tau = (T, w)$

Vogliamo ricavare da ciò che $\tau_1 \cong \tau_2$

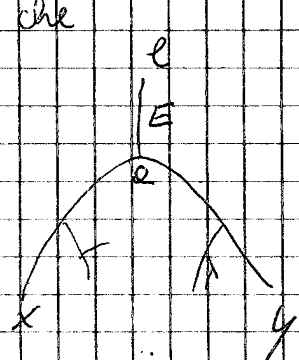
Supponiamo per assurdo che T_1 e T_2 si ricavino da T in modo diverso, cioè attaccando un edge E con vertice e a T in "punti diversi":

- o in T_1 a un vertice a e in T_2 a un vertice b con $a \neq b$
- o in T_1 a un vertice a e in T_2 a un edge $\{v_1 v_2\}$, cioè aggiungo un vertice b all'edge $\{v_1 v_2\}$ e attacco E a b (o viceversa)
- o sia in T_1 che in T_2 attacco E a un edge ma i due edge sono diversi
- o in entrambi gli alberi attacco E a uno stesso edge $\{v_1 v_2\}$ ma detti rispettivamente a e b i vertici che aggiungo a $\{v_1, v_2\}$ in T_1 e T_2 si ha che $w(\{v_1, a\}) \neq w(\{v_1, b\})$

Siano x e y foglie di T t.c. path(x,y) contenga "i punti di attacco di E in T_1 e T_2" precisamente i vertici o gli edges a cui si attacca E in T_1 e T_2.

Osservo che detto a il punto di attacco di E in T_1, ho che

$$w(\text{path}(a,x)) = \frac{D_{xe}(\tau_1) + D_{xy}(\tau_1) - D_{ey}(\tau_1)}{2}$$

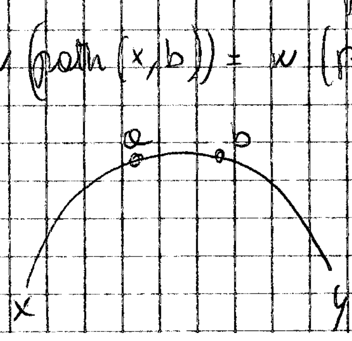


e analogamente, detto b il punto di attacco di E in T_2, ho che

$$w(\text{path}(b,x)) = \frac{D_{xe}(\tau_2) + D_{xy}(\tau_2) - D_{ey}(\tau_2)}{2}$$

Dato che i 2-pesi di τ_1 e τ_2 coincidono, si ha che $w(\text{path}(a,x)) = w(\text{path}(b,x))$ quindi $a = b$ perchè se fosse $a \neq b$ si avrebbe

$w(\text{path}(x,b)) = w(\text{path}(x,a)) \pm w(\text{path}(a,b)) \neq w(\text{path}(x,a))$



Quindi $T_1 \cong T_2$

Inoltre $w(E)$ in τ_1 è $\dfrac{D_{ex}(\tau_1) + D_{ey}(\tau_1) - D_{xy}(\tau_1)}{2}$

τ_2 è $\dfrac{D_{ex}(\tau_2) + D_{ey}(\tau_2) - D_{xy}(\tau_2)}{2}$

$\Rightarrow$ coincidono

$\Rightarrow \tau_1 \cong \tau_2$

QED

L'ALGORITMO NEIGHBOUR-JOINING

Sia $\mathcal{T} = (T, w)$ un albero pesato positivamente (o non negativo e con edges interni con peso positivo) con $L(T) = [n]$ (e senza vertici di grado 2).

L'algoritmo N-J serve per ricostruire l'albero pesato dai $D_{ij}(\mathcal{T})$, $i,j \in [n]$

Notazione • Per qualsiasi $x \in [n]$, definisco

$$R_x = \sum_{t \in [n]} D_{xt}(\mathcal{T})$$

• Per qualsiasi $x, y \in [n]$ con $x \neq y$ definisco

$$S_{xy} = (n-2)\, D_{xy}(\mathcal{T}) - R_x - R_y$$

OSS $S_{xy} = S_{yx}$

Lemma Se x e y sono neighbours e u è il loro picciolo, vale

$$D_{xu} = \frac{1}{2(n-2)} \left[(n-2)\, D_{xy} + R_x - R_y \right]$$

$(D_{ij} = D_{ij}(\mathcal{T}))$

Dim

Partiamo dal 2° membro:

$$(n-2)\, D_{xy} + R_x - R_y =$$

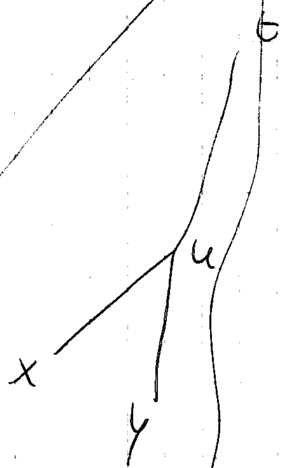
$$= (n-2)\, D_{xy} + \sum_{t \in [n]-x} D_{xt} - \sum_{t \in [n]-y} D_{yt} =$$

$$= (n-2)\, D_{xy} + \sum_{t \in [n]-\{x,y\}} D_{xt} - \sum_{t \in [n]-\{x,y\}} D_{yt} =$$

$$= \sum_{t \in [n]-\{x,y\}} \left(D_{xy} + D_{xt} - D_{yt} \right) =$$

$$= 2(n-2)\, D_{xu}$$

infatti $$D_{xu} = \frac{D_{xt} - D_{yt} + D_{xy}}{2}$$



INUTILE

QED

Lemma Se x e y sono neighbours, allora

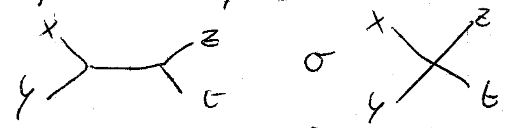
$$S_{xy} = \min_{z \in [n]-\{x\}} S_{xz} \qquad \text{e} \qquad S_{xz} > S_{xy}$$ a meno che anche z no neighb di x e y

Dim

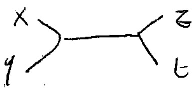
Devo dimostrare che $S_{xz} - S_{xy} \geq 0 \quad \forall z \in [n]-\{x\}$

$$\begin{aligned}
S_{xz} - S_{xy} &= (n-2) D_{xz} - R_x - R_z - (n-2) D_{xy} + R_x + R_y \\
&= (n-2) D_{xz} - (n-2) D_{xy} - R_z + R_y \\
&= (n-2) D_{xz} - (n-2) D_{xy} - \sum_{t \in [n]-\{z\}} D_{zt} + \sum_{t \in [n]-\{y\}} D_{yt} \\
&= (n-3) D_{xz} - (n-3) D_{xy} - \sum_{t \neq z,x} D_{zt} + \sum_{t \neq y,x} D_{yt} \\
&= (n-3) D_{xz} - (n-3) D_{xy} - \sum_{t \neq z,x,y} D_{zt} + \sum_{t \neq y,x,z} D_{yt} \\
&= \sum_{t \neq x,y,z} \underbrace{\left(D_{xz} - D_{xy} - D_{zt} + D_{yt} \right)}_{\geq 0}
\end{aligned}$$

← infatti x e y sono vicini quindi $T|_{xyzt}$ è



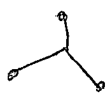
Se z non è vicino a x e y vuol dire che $\exists t$ t.c. $T|_{xyzt}$ è



quindi $\exists t$ t.c. — è > 0 **QED**

Teorema Se x e y $\in [n]$ sono tali che $S_{xy} = \min_{\substack{u,v \in [n] \\ u \neq v}} \{S_{u,v}\}$, allora x e y sono neighbours

Dim

- Se $n = 2$ o 3, T è così o  rispettivamente

quindi x e y sono per forza neighbours

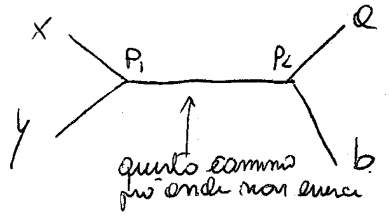
- Supponiamo $n \geq 4$.

Siano x e y tc $S_{xy} = \min\{S_{ij}\}$.

Supponiamo per assurdo che x e y non siano vicini. Allora, per il lemma, né x né y hanno vicini (infatti se x e z fossero vicini, si avrebbe $S_{xz} < S_{xy}$ ASSURDO).

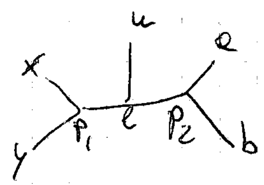
- Se $n = 4, 5$ si ha un assurdo perché, comunque scelgo due foglie in un albero con 4 o 5 foglie, almeno una delle due ha un vicino.
- Quindi possiamo supporre $n \geq 6$

Siano $a, b \in [n]$ due vicini. Allora $a, b \neq x, y$ e l'albero $T|_{xyab}$ è necessariamente così:

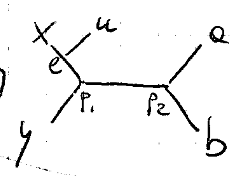


$$0 \leq S_{ab} - S_{xy} = (n-2) D_{ab} - R_a - R_b - (n-2) D_{xy} + R_x + R_y$$
$$= (n-2)[D_{ab} - D_{xy}] - \sum_{t \neq a} D_{at} - \sum_{t \neq b} D_{bt} + \sum_{t \neq x} D_{xt} + \sum_{t \neq y} D_{yt}$$
$$= (n-4)(D_{ab} - D_{xy}) - \sum_{t \neq a,b} D_{at} - \sum_{t \neq ab} D_{bt} + \sum_{t \neq xy} D_{xt} + \sum_{t \neq x,y} D_{yt}$$
$$= (n-4)(D_{ab} - D_{xy}) + \sum_{t \neq abxy} (-D_{at} - D_{bt} + D_{xt} + D_{yt})$$
$$= \sum_{t \neq a,b,x,y} \underbrace{(D_{ab} - D_{xy} - D_{at} - D_{bt} + D_{xt} + D_{yt})}_{\alpha_t}$$

Siano $P = \{u \in [n] - \{x y a b\} \mid u$ si attacca a $T|_{xyab}$ in $[P_1 P_2]\}$



$Q = \{u \in [n] - \{x y a b\} \mid$ " $T|_{xyab}$ in $[x\, y] - \{P_1\}\}$



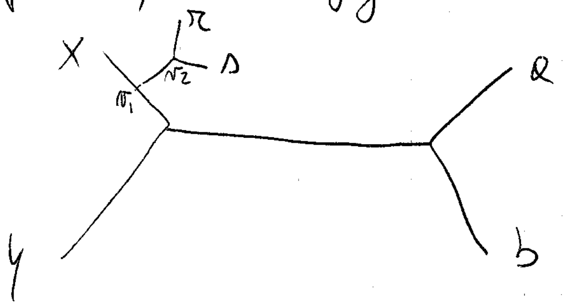
Si ha $[n] = P \cup Q$

$$\alpha_u = \begin{cases} 2(D_{P_1 e} - D_{e P_2}) & \text{se } u \in P \\ -2 D_{e P_2} & \text{se } u \in Q \end{cases}$$

Il valore assoluto di α_u se $u \in Q$ è $>$ del valore assoluto di α_u se $u \in P$. Dato che $\sum_{u \in P} \alpha_u + \sum_{u \in Q} \alpha_u \geq 0$ si deve avere che

$$\# P > \# Q$$

Dato che x e y non sono vicini e non hanno vicini, ci devono essere due elementi di $[n]$, r e s, vicini fra loro che si attaccano al cammino fra x e y come in figura



(o nel ramo di y)

Consideriamo l'albero $T|_{xyrs}$. Analogamente a prima posso dividere $[n]$ in

$P' = \{ u \in [n] \mid u$ si attacca a $[v_1 v_2] \}$

$Q' = \{$ " " $[x\, y] - \{v_1\} \}$

e ho che $\# P' > \# Q'$

Quindi ottengo

$$\# P > \# Q \geq \# P' > \# Q' \Rightarrow \# P > \# Q'$$

dato che $P' \subset Q$

ASSURDO perché $P \subset Q'$

QED

Algoritmo Neighbour-Joining:

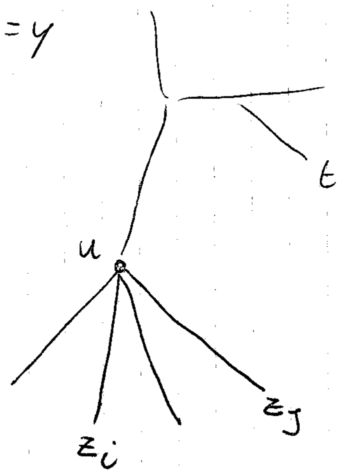
	OPERAZ
INPUT $D_{ij}(\mathcal{T})$ $\quad i,j \in [n]$	
calcolo gli R_i $\quad i \in [n]$	$O(n^2)$
calcolo gli S_{ij} $\quad i,j \in [n]$ con $i \neq j$	$O(n^2)$
calcolo il minimo degli S_{ij}; siano $x\,y$ tc $\quad S_{xy} = \min\{S_{ij}\}$	$O(n^2)$

allora per il teorema x e y sono vicini

sia $C = \{z \in [n]-\{x,y\} \mid S_{xz} = S_{xy}\}$

per il lemma C è il cherry completo contenente x e y.

Chiamo $z_1, \dots, z_k$ gli elementi di C con $z_1 = x$ $\quad z_2 = y$



OSS Se u è il picciolo di C

$$w(\{u, z_i\}) = \frac{D_{z_i z_j} + D_{z_i t} - D_{z_j t}}{2} \qquad \forall t \in [n]-C \quad \forall j \neq i$$

Definisco

$$\begin{cases} D'_{ab} = D_{ab} & \forall a,b \notin C \\ D'_{au} = D_{a z_1} - w(\{z_1, u\}) & \forall a \notin C \end{cases}$$

(in pratica i D'_{ab} sono i pesi dell'albero $\mathcal{T}'$ che si ottiene da $\mathcal{T}$ "potando" il cherry C)

Itero il procedimento per la nuova famiglia

$$\{D'_{ij}\} \quad i,j \in \underbrace{[n] - C \cup \{u\}}_{\text{insieme di cardinalità } \leq n-1}$$

e così via.

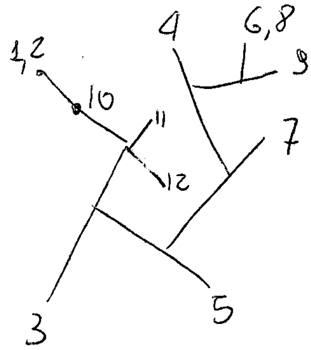
Per ottenere un cherry di $\mathcal{T}$ occorrono $O(n^2)$ operazioni

In tutto $O(n^3)$.

X - trees

Def Sia X un insieme finito.
Un <u>X-tree</u> è un albero T con una mappa "labellante" $\varphi : X \to V(T)$
tc $\varphi(X) \supset V(T)^{(1)}$ e $V(T)^{(2)}$

Es



$X = [12]$

Si dice <u>semplice</u> se φ è iniettiva.
Si dice <u>filogenetico</u> se $\varphi(X) = V(T)^{(1)}$ (cioè $L(T)$ e φ iniettiva
cioè se X coincide con l'insieme delle foglie.

Due X-trees (T_1, φ_1) (T_2, φ_2) si dicono <u>isomorfi</u> se c'è
una bigezione $i : V(T_1) \to V(T_2)$ tc
$\{a,b\} \in E(T_1) \iff \{\varphi(a), \varphi(b)\} \in E(T_2)$ $\forall a, b \in V(T_1)$
$\varphi_2(x) = i(\varphi_1(x))$ $\forall x \in X$

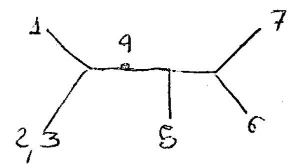
<u>Def</u> Un edge di un albero si dice <u>pendent</u> se uno dei suoi due vertici è uno foglio.

SPLITS

Def Sia X un insieme (finito). Uno split $(A|B)$ di X è una bipartizione di X in due sottoinsiemi non vuoti: $\{A, B\}$ con $A \cup B = X$ $A \cap B = \emptyset$ $A, B \neq \emptyset$. Un sistema di splits (split system) su X è un insieme di splits di X.

Def Sia X un insieme finito e (T, φ) un X-tree. Ogni edge di T dà uno split di X. Si indica con S_T il sistema di splits su X dato dagli edges di T.

Esempio



$S_T = \{ \{1\}\{2 \ldots 7\}\} \ \{\{2,3\}\{1\,4 \ldots 7\}\}$

etc...

Teorema "Caratterizzazione degli split systems che derivano da alberi".

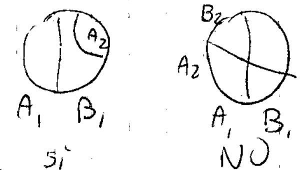
Sia X un insieme finito. Sia S uno split system su X.

$\exists$ un X-tree (T, φ) tc $S = S_T \iff$

$\forall$ $(A_1|B_1)$, $(A_2|B_2) \in S$ si ha che almeno uno fra A_2 e B_2 è contenuto o in A_1 o in B_1 (★)

cioè ha intersezione vuota o con A_1 o con B_1

OSS La condizione equivale a "la torta è divisa in 3 parti non in 4"

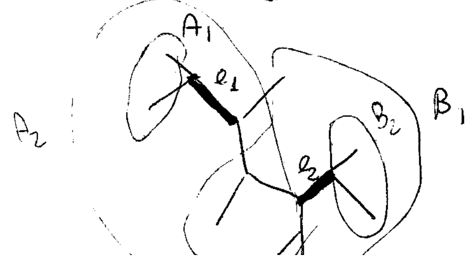


Dim

$\Rightarrow$ Sia (T, φ) un X-tree.

Sia e_1 un edge di T; esso determina uno split $(A_1|B_1)$

Sia e_2 un altro edge; esso sta nel sottoalb di T determinato da e_1 contenente B_1



Allora, detto $(A_2|B_2)$ lo split determinato da e_2, se A_2 sta nel sottoalb $\ni e_1$ ho che $A_1 \subset A_2$

$\Leftarrow$ Sia S uno split system di X per cui valga $\star$.

Voglio dimostrare che esiste un X-tree (T, φ) tc $S_T = S$

Ragiono per induzione su $\# S$.

Sia
$$\mathcal{I}_S = \{ A \subset X \mid (A \mid X-A) \in S \}$$

Sia $\bar{A} \in \mathcal{I}_S$ minimale per l'inclusione

<u>OSS</u> Se $A \in \mathcal{I}_S$ e $A \cap \bar{A} \neq \emptyset$, allora $\bar{A} \subset A$

infatti

consideriamo gli splits $(A \mid X-A)$ e $(\bar{A} \mid X - \bar{A})$;

per $\star$, o $\bar{A} \subset A$ o $\bar{A} \subset X-A$ o $X-\bar{A} \subset A$ o $X-\bar{A} \subset X-A$

$\bar{A} \subset X-A$: NO perchè $A \cap \bar{A} \neq \emptyset$

$X-\bar{A} \subset A$: NO perchè equivale a $X-A \subset \bar{A}$ ma $\bar{A}$ minimale quindi si avrebbe $X-A = \bar{A}$ $\Longrightarrow A \cap \bar{A} = \emptyset$ ASSURDO

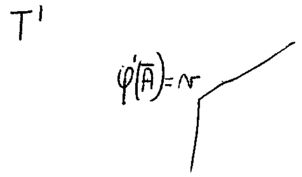
$X-\bar{A} \subset X-A$: equivale a $A \subset \bar{A}$ ma $\bar{A}$ minimale quindi si avrebbe $A = \bar{A}$

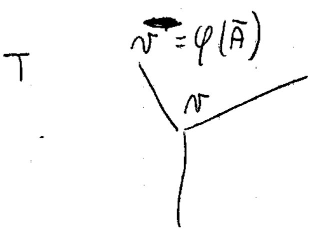
Consideriamo lo split system $S' = S - (\bar{A}, X-\bar{A})$

Per ipotesi induttiva esiste un X-tree (T', φ') con $S_{T'} = S'$.

Osserviamo che $\varphi'(\bar{A})$ è costituito da un solo vertice v di T', infatti se $\varphi'(\bar{A})$ contenesse due vertici di T' ci sarebbe un edge che li separa e quindi uno split $(A \mid B)$ in S' e quindi in S tc $\bar{A} \cap A \neq \emptyset$ e $\bar{A} \cap B \neq \emptyset$, ma allora per l'oss si avrebbe $\bar{A} \subset A$, $\bar{A} \subset B$ ASSURDO.

Costruisco (T, φ) così:



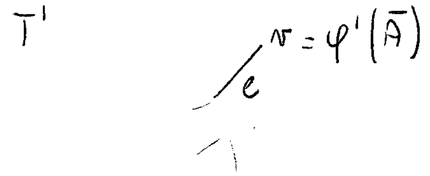


definisco $\varphi(x) = \varphi'(x) \quad \forall x \in X - \bar{A}$

$\varphi(\bar{A}) = \bar{v}$

<u>OSS</u> Perchè (T, φ) così definito è un X-tree?

Se v aveva grado ≥ 2 in T', allora in T ha grado ≥ 3 e non mi devo preoccupare se è labellato o no.
Se v aveva grado 1 in T', allora in T ha grado $= 2$ e quindi devo vedere che è labellato;



S' è $S - (\bar{A} \mid X - \bar{A})$ quindi l'edge e non può dare lo split $(\bar{A} \mid X - \bar{A})$, quindi vuol dire che v è anche $= \varphi(t)$ per qualche $t \notin \bar{A}$.

QED

Teorema "Gli split systems determinano gli alberi"
Sia X un insieme finito. Siano (T_1, φ_1) e (T_2, φ_2) due X-trees.
Essi sono isomorfi $\iff S_{T_1} = S_{T_2}$

Dim

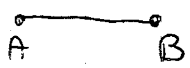
$\Rightarrow$ Ovvio

$\Leftarrow$ Dimostro la tesi per induzione sulla cardinalità dello split system.

Siano (T_1,φ_1) (T_2,φ_2) due X-trees t.c. $S_{T_1} = S_{T_2}$

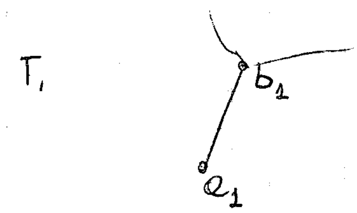
Se $\# S_{T_i} \in \{0,1\}$ ok infatti

- se $\# S_{T_i} = 0$ allora T_1 e T_2 non hanno edge e quindi consistono di un solo vertice labellato con tutto X
- se $\# S_{T_i} = 1$, sia $S_{T_i} = \{(A|B)\}$; allora T_1 e T_2 devono essere necessariamente l'albero



Supponiamo $\# S_{T_i} > 1$

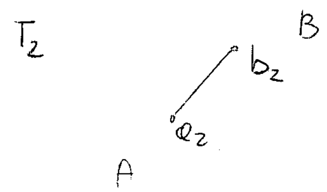
Sia a_1 una foglia di T_1 e sia $e_1 = \{a_1, b_1\}$ l'edge adiacente a a_1.



L'edge di T_1, e_1, determina uno split di X: $(A|B) \in S_{T_1}$ con $A = \varphi_1^{-1}(a_1)$

Quindi $(A|B)$ appartiene anche a S_{T_2}; esso sarà dato da un edge di T_2 $e_2 = \{a_2, b_2\}$

Anche e_2 è un edge pendant in T_2; infatti supponiamo che A stia dalla parte di a_2, B dalla parte di b_2



Se e_2 non fosse una foglia di T_2 e quindi ci fosse un edge dalla parte di e_2, allora ci sarebbe uno split $\in S_{T_2}$ che divide A; questo split starebbe anche in S_{T_1}, ma in T_1 A non è diviso da nessuno split perché va tutto in e_1.

Contraiamo gli edges e_1 e e_2 e chiamiamo (T_1', φ_1') e (T_2', φ_2') gli alberi così ottenuti.

Per ipotesi induttiva $(T_1', \varphi_1') \cong (T_2', \varphi_2')$; sia $i' : V(T_1') \to V(T_2')$ la bijezione che dà tale isomorfismo. Dato che $\varphi_1'(A) = b_1$ e $\varphi_2'(A) = b_2$ e $i\varphi_1' = \varphi_2'$ $\Rightarrow i(b_1) = b_2$

Definisco $i : V(T_1) \to V(T_2)$ nel modo seguente:

$$\begin{cases} i(e_1) = e_2 \\ i(v) = i'(v) & \forall v \in V(T_1) - \{e_1\} \end{cases}$$

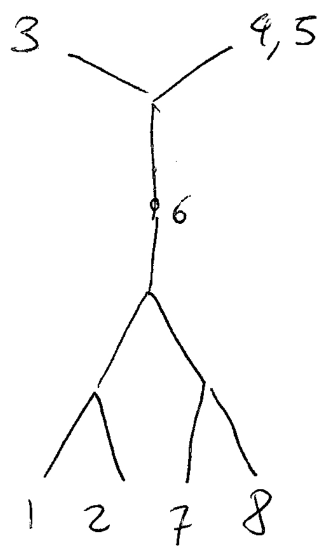
Tale mappa dà un isomorfismo fra T_1 e T_2

QED

Esercizio Sia $X = \{1, \dots, 8\}$

Sia $S = \{ (1| \quad),$
$(2| \quad),$
$(3| \quad),$
$(4,5| \quad),$
$(7| \quad),$
$(8| \quad),$
$(1,2| \quad),$
$(7,8| \quad),$
$(1,2,7,8| \quad),$
$(1,2,7,8,6| \quad) \}$

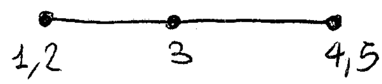
Trovare un X-tree (T, φ) tc $S_{(T,\varphi)} = S$



Esercizio Sia $X = \{1, \dots, 5\}$

Sia $S = \{ (12|345), (123|45) \}$

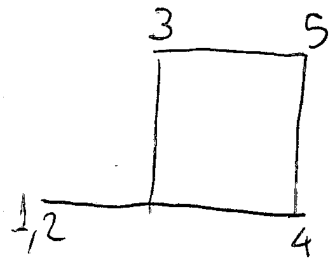
Trovare un X-tree $(T \varphi)$ tc $S_{(T,\varphi)} = S$



Esercizio Sia $X = \{1, \dots, 5\}$

Sia $S = \{ (12|345), (123|45),$
$(124|35) \}$

Trovare un grafo labellato con X (cioè con una mappa $\varphi: X \to V(G)$) tc $V^1(G)$ e $V^2(G) \subset \varphi(X)$) e tc in modo da disconnettere G eliminando uno o due edges, si ottengono gli splits di S

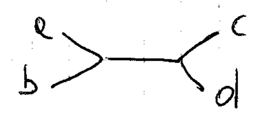


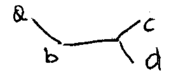
QUARTETS

Def Sia X un insieme. Un <u>quartetto</u> su X è una partizione di un 4-sottoinsieme di X in due 2-sottoinsiemi.

Un quartetto $\{\{a_1 a_2\},\{b_1 b_2\}\}$ si denota $(a_1 a_2 | b_1 b_2)$

Un <u>sistema di quartetti</u> su X è un insieme di quartetti su X

Def <u>Un X-tree (T,φ) determina un sistema di quartetti su X,</u> $Q_{(T,\varphi)}$ nel modo seguente: dati $a\, b\, c\, d$ distinti in X si dice che $(ab|cd) \in Q_{(T,\varphi)} \iff \text{path}(a,b) \cap \text{path}(c,d) = \emptyset$ (cioè i due cammini non hanno vertici in comune) cioè se $T|_{abcd}$ è così 

o  etc

Def Sia X un insieme e sia Q un sistema di quartetti su X.
Si dice che

Q è <u>thin</u> $\iff$ $\forall\, a\,b\,c\,d$ distinti in X al più uno fra $(ab|cd), (ac|bd), (ad|bc)$ sta in Q.

Q è <u>transitive</u> $\iff$ $(a_1 a_2 | b_1 x) \in Q$ e $(a_1 a_2 | x\, b_2) \in Q$ implica $(a_1 a_2 | b_1 b_2) \in Q$

Q è <u>saturated</u> $\iff$ $(a_1 a_2 | b_1 b_2) \in Q$ implica o $(a_1 x | b_1 b_2) \in Q$ o $(a_1 a_2 | b_1 x) \in Q$
non disgiuntivo

<u>Teorema "Caratterizzazione dei sistemi di quartetti derivanti dagli alberi"</u>

Sia X un insieme. Sia Q un sistema di quartetti su X.
Esiste un X-tree filogenetico (T,φ) t.c. $Q = Q_{(T,\varphi)}$ $\iff$ Q è thin, transitive e saturated.

<u>OSS</u> X insieme. Q sistema di quartetti su X transitivo e saturato

$$(a_1 a_2 | b_1 b_2) \in Q \iff \begin{pmatrix} (a_1 x | b_1 b_2) \in Q \\ \text{e} \\ (a_2 x | b_1 b_2) \in Q \end{pmatrix} \quad \text{o} \quad \begin{pmatrix} (a_1 a_2 | b_1 x) \in Q \\ \text{e} \\ (a_1 a_2 | b_2 x) \in Q \end{pmatrix}$$

Lemma Sia X un insieme finito e sia Q un quartet system su X.
Siano $a, b \in X$; definiamo su $X - \{a,b\}$ la seguente relazione

$$c \leq_{ab} d \iff ad \mid bc \notin Q$$

Q è saturato $\iff$ la relazione $\leq_{ab}$ è transitiva $\forall\, a, b \in X$

Dim

$$\leq_{ab} \text{ è transitiva} \iff \begin{cases} \forall\, c\, d\, e & c \leq_{ab} d \text{ e } d \leq_{ab} e \\ \text{implica} & c \leq_{ab} e \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} \forall\, c\, d\, e & (ad \mid bc) \notin Q \text{ e } (ae \mid bd) \notin Q \\ \text{implica} & (ae \mid bc) \notin Q \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} \forall\, c\, d\, e & ae \mid bc \in Q \text{ implica} \\ \text{o } (ad \mid bc) \in Q & \text{o } (ae \mid bd) \in Q \end{cases}$$

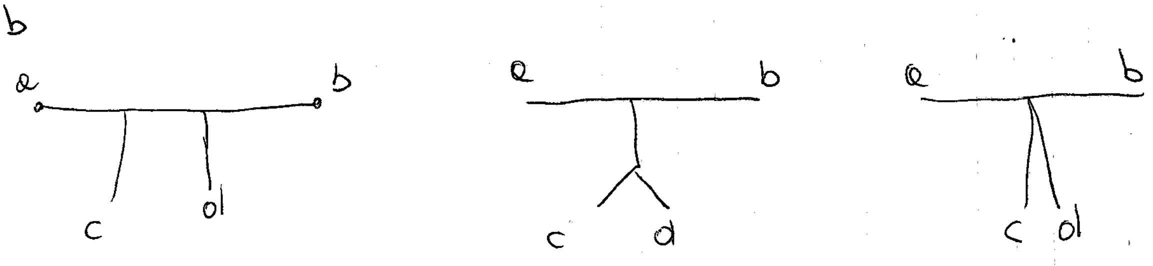
Quindi $\leq_{ab}$ è transitiva $\forall\, ab \iff Q$ è saturato

QED

Oss Se (T, φ) è un X-tree e $Q = Q_{(T,\varphi)}$, si ha

$$c \leq_{ab} d$$

se e solo se considerando il cammino fra a e b, il punto dove si attacca c è prima o coincide con pto dove si attacca d, andando da a a b



Def X insieme finito; $a\, b \in X$. Dico che, se Q è system di quartetti saturato, $c \sim_{ab} d \iff c \leq_{ab} d$ e $d \leq_{ab} c$

(è una relaz di equiv)

Dim teorema

$\Longrightarrow$ ovvio

$\Longleftarrow$ Per induzione su $\# Q + \# X$

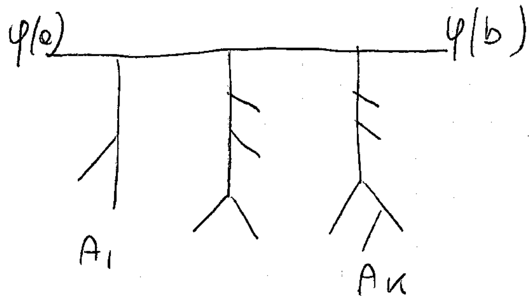
Se $Q = \emptyset$, prendo (T,φ) = star tree con foglie gli elementi di X; allora $Q_{(T,\varphi)} = Q$

Quindi possiamo supporre $Q \neq \emptyset$; quindi $\# X \geq 4$

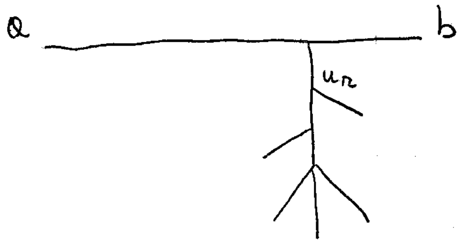
Osserviamo che se $Y \subset X$ allora anche $Q|_Y$ è thin, saturated, transitive

Siano a, b due elementi distinti di X.
Per ipotesi induttiva esiste un $X-\{b\}$-tree filogenetico (T',φ') tc $Q_{(T',\varphi')} = Q|_{X-\{b\}}$
Siano $A_1, \dots, A_k$ le classi di equivalenza in $X-\{a,b\}$ per $\sim_{ab}$ ordinate in modo tc $d \leq_{ab} d'$ $\forall d \in A_i$ $\forall d' \in A_{i+1}$

<u>oss</u> Se (T,φ) tc $Q_{(T,\varphi)} = Q$ esiste, allora $A_1 \dots A_k$ sono i "festoni" attaccati al cammino fra a e b

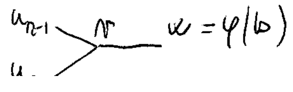


Sia $c \in A_k$. Sia $u_0 - - - u_l$ il cammino fra $\varphi(a)$ e $\varphi(c)$ e sia r il max tc $p(a,c')$ $\forall c' \in A_k$ contenga $u_0 — u_r$



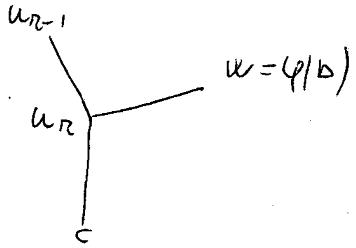
<u>1° caso</u>

$ab|ee' \in Q$ $\forall e, e' \in A_k$ distinti
Costruisco (T,φ) così: al posto dell'edge $\{u_{r-1}, u_r\}$ di (T',φ') metto



<u>2° caso</u> $\exists\ e, e' \in A_k$ tc $ab|ee' \notin Q$

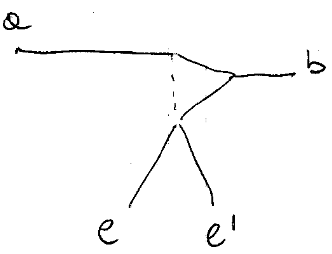
Costruisco (T, φ) così: aggiungo attaccando a u_r un edge $\{u_r, w\}$ con $w = \varphi(b)$



Va verificato che $Q_{(T,\varphi)} = Q$

- Per quaterne contenute in $X - \{b\}$ è ovvio
- Consideriamo una quaterna del tipo $\underline{a\,b\,e\,e'}$ con $e\,e' \in A_k$ tc $ab|ee' \in Q$

<u>1° caso</u>



$ab|ee' \in Q_{(T,\varphi)}$

<u>2° caso</u>

$\exists\ c\,c'$ t.c. $ab|cc' \notin Q$

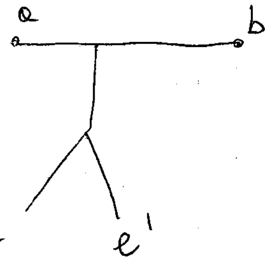
So che $ab|ee' \in Q \underset{\text{saturato}}{\Longrightarrow}$ $ac|ee' \in Q$ o $\underline{ab|ec \in Q}$ e $ac'|ee' \in Q$ o $\underline{ab|ec' \in Q}$

se fossero veri avrei $ab|cc' \in Q$ per la prop transitiva ASSURDO.

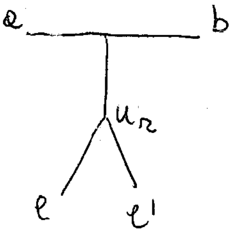
- Consideriamo una quaterna del tipo $\underline{a\,b\,e\,e'}$ con $e\,e' \in A_k$ e $ab|ee' \notin Q$.

sono per forza nel 2° caso

Supponiamo per assurdo $ab|ee' \in Q_{(T,\varphi)}$; quindi la situazione è così:



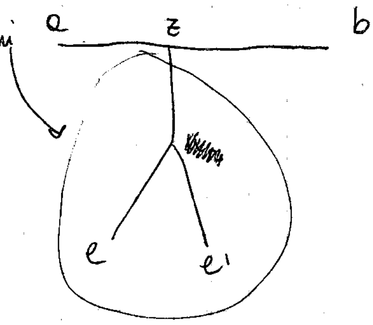
Se esistessero solo e e $e' \in A_k$, si avrebbe che u_r è il piccolo del cherry $e\,e'$



assurdo per come ho definito (T,φ)

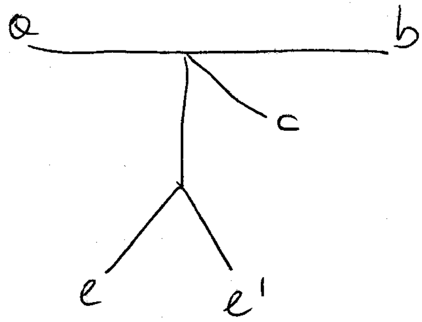
Quindi $\exists\, c \in A_k \quad c \neq e, e'$

Se tutti i $c \in A$ insistono qui



avrei che $u_r \neq z$ e quindi un assurdo per come ho costruito (T,φ).

Quindi $\exists\, c \in A_k \quad c \neq e, e'$ tc



Quindi $ac|ee' \in Q_{(T,\varphi)}$

$\Rightarrow ac|ee' \in Q$

$\Rightarrow$ $ab|ee' \in Q$ o $ac|eb \in Q$

saturazione

↑ ASSURDO

↑ ASSURDO perché $c \sim_{ab} e$ quindi

$c \leq_{ab} e$ così $ae|bc \notin Q$

$e \leq_{ab} c$ così $ac|be \notin Q$

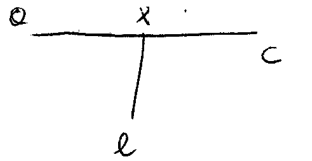
- Consideriamo una quaterna $a\,b\,e\,c$ con $e \in A_i$ e $c \in A_u$ $i<u$

Ho che $e \leq_{ab} c$ cioè $(ac|be) \notin Q$

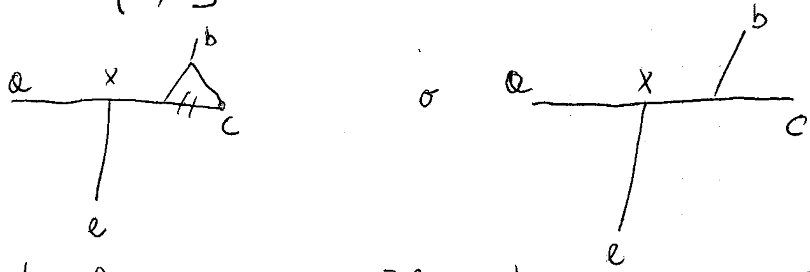
$c \not\leq_{ab} e$ cioè $(ae|bc) \in Q$

Perciò $\{(ae|bc) \in Q_{(T,\varphi)}$

Sia x il centro della stella di foglie a, e, c in (T', φ')

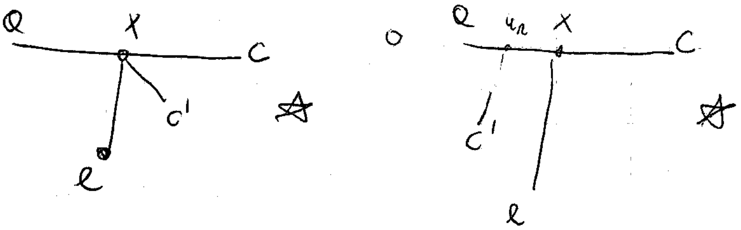


Se $u_r \in (x, c]$ ok



Voglio dim che u_r non può coincidere con x o $\in (a, x)$

Se così fosse $\exists\, c' \in A_u$ tc



So che $ae|bc \in Q$; $\underset{SATUR}{\Rightarrow}$ $ae|cc' \in Q$ o

$ac'|bc \in Q$

impossibile perché

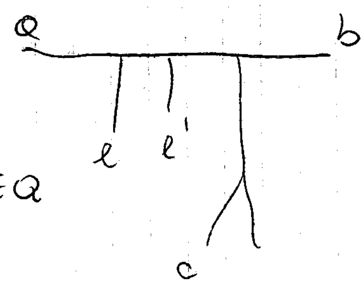
$c' \leq_{ab} c$ $\quad ac|bc' \notin Q$

$c \leq_{ab} c'$ $\quad ac'|bc \notin Q$

Quindi $(ae|cc') \in Q \Rightarrow \in Q_{(T'\varphi')}$

ma ciò è assurdo vedere figure ☆

• Consideriamo una quaterna $\underline{(a\,b\,e\,e')}$ con $e \in A_i$, $e' \in A_j$
con $i < j < k$
Dato che $e' \leq_{ab} a$ si ha che $ae|be' \in Q$
Tesi $\{ \; ae|be' \in Q_{(T,\varphi)}$



$ae|be' \in Q \overset{\text{satur}}{\Longrightarrow}$ o $ac|be' \in Q$ o $ae|ce' \in Q$

IMPOSSIBILE perché $e' \leq_{ab} c$

quindi $ae|ce' \in Q \Longrightarrow ae|ce' \in Q_{(T',\varphi')} \subset Q_{(T\varphi)}$

$\overset{\text{satur}}{\Longrightarrow}$ o $(be'|ae) \in Q_{(T\varphi)}$ (che è la tesi)

o $(ce'|ab) \in Q_{(T\varphi)}$ ← impossibile perché $c \not\leq_{ab} e'$
cioè $ae'|bc \in Q \overset{\text{CASO PRECED}}{\Longrightarrow}$
$ae'|bc \in Q_{(T,\varphi)}$

• Consideriamo una quaterna $\underline{abee'}$ con $\underline{e\,e' \in A_i}$
quindi $e \leq_{ab} e'$ e $e' \leq_{ab} e$ cioè $ae'|be \notin Q$ e $ae|be' \notin Q$

Tesi $\{ \; (ab|ee') \in Q \iff (ab|ee') \in Q_{(T\varphi)}$

$\Updownarrow$ trans e satur $\qquad\qquad \Updownarrow$

$(ac|ee') \in Q$ e $(bc|ee') \in Q$ $\iff$ $\in Q_{(T,\varphi)}$, $\in Q_{(T,\varphi)}$

o $\qquad\qquad$ o

$(ab|ce') \in Q$ e $(ab|ce) \in Q$ $\iff$ $\in Q_{(T,\varphi)}$, $\in Q_{(T,\varphi)}$

CASO PRECEDENTE

Se valgono quelle OK
Se vale $(ac|ee') \in Q$ allora $(ac|ee') \in Q_{(T,\varphi)} \Longrightarrow$
$ab|ee' \in Q_{(T\varphi)}$ o $ac|be \in Q_{(T\varphi)}$ che equivale su un

caso precedente a $(ac|be) \in Q$ ma $e \leq_{ab} c$ avrei
$ac|eb \notin Q$ ASSORDO

Analogam l'altra direzione.

- Consideriamo una qualsiasi $b\,e\,f\,g$ con $e\,f\,g \neq a$

$$(fg \mid be) \in Q \underset{OSS}{\Longleftrightarrow} \left(\begin{array}{c} (fg \mid ba) \in Q \\ e \\ (fg \mid ae) \in Q \end{array} \right) \underset{\substack{\text{con} \\ \text{precedente}}}{\Longleftrightarrow} \left(\begin{array}{c} (fg \mid be) \in Q_{(T\varphi)} \\ (fg \mid ae) \in Q_{(T\varphi)} \end{array} \right) \underset{OSS}{\Longleftrightarrow} (fg \mid be) \in Q_{(T\varphi)}$$

Analog permutando e f g.

QED

Teorema "Il sistema di quartetti determina l'albero"

Sia X un insieme finito. Siano $(T_1,\varphi_1),(T_2,\varphi_2)$ due X-trees tc $L(T_1)=L(T_2)=X$ e senza vertici di grado 2. Allora

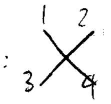
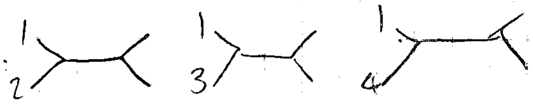
$$(T_1,\varphi_1)\cong(T_2,\varphi_2) \iff Q_{(T_1,\varphi_1)}=Q_{(T_2,\varphi_2)}$$

Dim

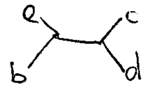
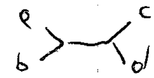
$\Rightarrow$ Ovvia

$\Leftarrow$ Per induzione su $n \doteq \#X$.

$\boxed{n=4}$

Un albero con 4 foglie o è così:  o così: 

Se T_1 è così X allora $Q_{(T_1,\varphi_1)}=\emptyset$, quindi $Q_{(T_2,\varphi_2)}=\emptyset$ quindi T_2 è così X

"  " $=\{(ab|cd)\}$ $=\{(ab|cd)\}$ " 

$\boxed{n-1 \Rightarrow n}$

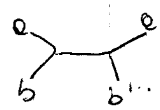
Oss Sia (T,φ) un X-albero con $L(T)=X$; siano $a,a'\in X$.

1) $a\,a'$ vicini $\iff (ab|a'b')\notin Q_{(T,\varphi)}$ $\forall\, b,b'\in X-\{a,a'\}$

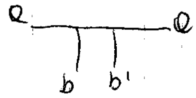
2) $a\,a'\in$ un cherry C con deg(picciolo) $=\#C+1$ $\iff aa'|bb'\in Q_{(T,\varphi)}$ $\forall\, b,b'\notin C$

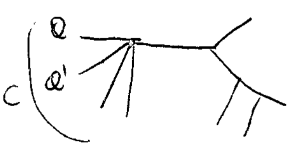
"cherry buono"

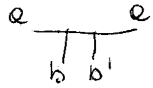
Infatti $\Rightarrow$ $T/aa'bb'$
$\Leftarrow$ X ASSURDO

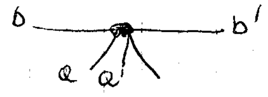
1) $\Rightarrow$ se per assurdo $\exists\, b\, b'$ tc $ab|a'b'\in Q$ così 

allora $a\,a'$ non sarebbero vicini

$\Leftarrow$ se per assurdo $a\,a'$ non vicini, quindi nel cammino fra a e a' ci fossero almeno due vertici di grado ≥ 3  potrei trovare $b\,b'$ tc $ab|a'b'\in Q$

2) $\Rightarrow$  $aa'|bb'\in Q$ ok

$\Leftarrow$ $a\,a'$ vicini, infatti se non lo fossero  $\exists\, bb'$ tc $aa'|b'b\notin Q$

Se C cherry $\ni a,a'$; se deg(picciolo di C) $\neq \#C+1$ 

troverei bb' tc $aa'|bb'\notin Q$

$\square$

Per l'oss, il sistema dei quartetti determina i cherries, e quali cherries sono buoni (cioè se due alberi hanno lo stesso sistema dei quartetti allora hanno gli stessi cherries e gli stessi cherries buoni).

Sia C un cherry di T_1 (e di T_2). Sia $a \in C$. Siano T_1' e T_2' ottenuti rispettivamente da T_1 e T_2 eliminando a e il suo edge adiacente
e, se è venuto fuori un vertice v di grado 2, sostituendo i suoi due edges adiacenti $\{b,v\}\{v,c\}$ con un solo edge $\{b,c\}$.
Per ipotesi induttiva $T_1' \cong T_2'$.

Tre casi
$$\begin{cases} \#C > 2 \\ \#C = 2 \text{ e } C \text{ non buono} \\ \#C = 2 \text{ e } C \text{ buono} \end{cases}$$

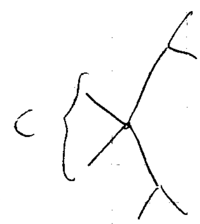
- $\#C > 2$

  allora T_1 si ottiene da T_1' aggiungendo un edge al picciolo di C

  idem T_2 da T_2'

  $\Rightarrow T_1 \cong T_2$

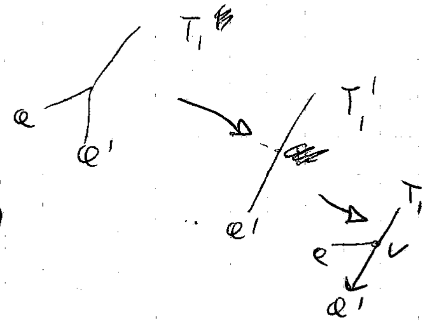
- $\#C = 2$ e C non buono

  allora T_1 " " "

  T_2

- $\#C = 2$ e C buono $C = \{a, a'\}$

  allora T_1 T_1' aggiungendo un vertice v all'edge di a' e un edge attaccato a v $\{a,v\}$

  idem T_2

  $\Rightarrow T_1^\# \cong T_2$

QED