K - PESI

Teorema (Pachter - Speyer 2006) "I k pesi determinano gli alberi pesati positivi se k piccolo"

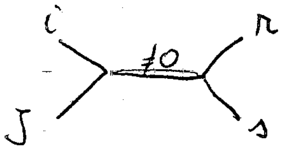
Siano $\tau_1 = (T_1, w_1)$, $\tau_2 = (T_2, w_2)$ due alberi pesati positivi con $L(T_1) = L(T_2) = [n]$ e senza radici di grado 2.
Supp $n \geq 2k-1$. Allora, se $D_I(\tau_1) = D_I(\tau_2)$ $\forall I \in \binom{[n]}{k}$ allora $\tau_1 \cong \tau_2$

OSS Sia $\tau = (T, w)$ un albero pesato positivamente ~~con 4 o 5 foglie~~. Siano $i\,j\,r\,s \in L(T)$, $v \in V(T)$. Allora

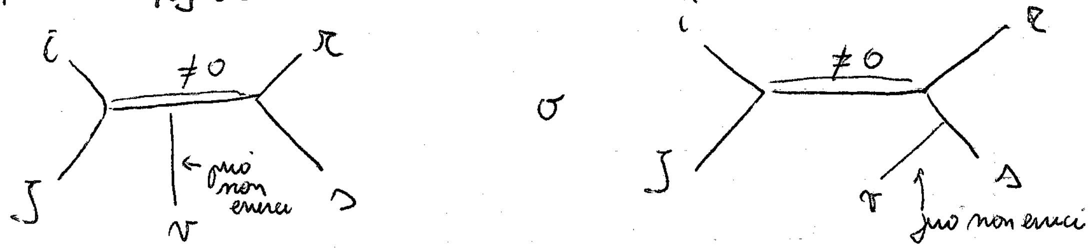
$$(ij|rs) \in Q_T \iff \underbrace{w(ijv)}_{\text{intendo } T|_{ijv}} + w(rsv) < w(irv) + w(jsv) = w(isv) + w(jrv)$$

Dim

$\Rightarrow$ Supp $(ij|rs) \in Q_T$, quindi $T|_{ijrs}$ è

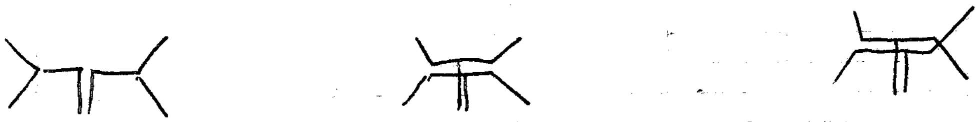


quindi $T|_{ijrsv}$ è

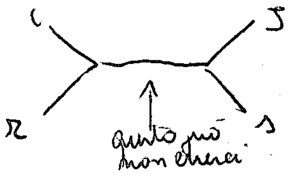


a meno di scambiare ijrs

$w(ijv) + w(rsv)$ $\quad$ $w(irv) + w(jsv)$ $\quad$ $w(isv) + w(jrv)$

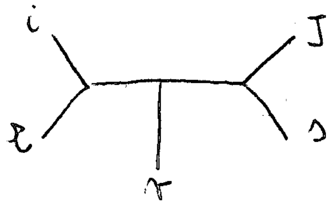


$\Leftarrow$ Supponiamo per assurdo $(ij|rs) \notin Q_T$ quindi $T|_{ijrs}$ è

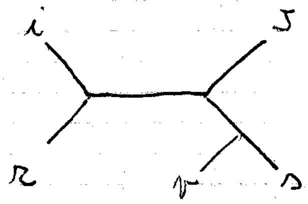


(modulo scambiare r con s)

Quindi $T|_{ijrsv}$ è

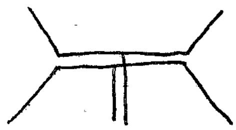


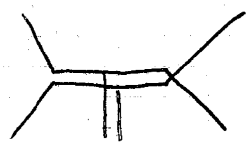
o



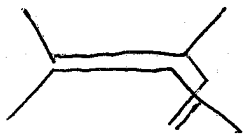
quindi $w(ijv) + w(rsv) = w(isv) + w(rjv)$
infatti

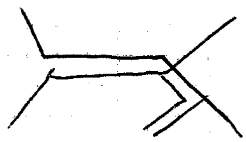
1° caso





2° caso





quindi si ha un assurdo.

$\square$

Sia k t.c. $2k-1 \leq n$

Lemma: Sia $\tau = (T, w)$ un albero pesato positivamente con $L(T) = [n]$.
Siano $i\,j\,r\,s \in [n]$. Allora
$(ij|rs) \in Q_T \iff \exists\, V \in \binom{[n] - \{ijrs\}}{k-2}$ tc

$$w(ijV) + w(rsV) < w(irV) + w(jsV) = w(isV) + w(jrV)$$

Dim

Sia $V \in \binom{[n] - \{ijrs\}}{k-2}$. Sia $\tilde{\tau} = (\tilde{T}, \tilde{w})$ ottenuto da τ contraendo $T|_V$

Allora

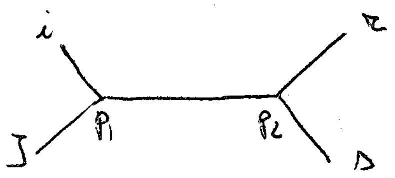
$$w(ijV) = \tilde{w}(\tilde{i}\tilde{j}\tilde{V}) + w(V) \qquad (\star)$$

dove $\tilde{i}\,\tilde{j}$ vertici in $\tilde{\tau}$ che derivano dai vertici $i\,j$
$\tilde{V}$ vertice in $\tilde{\tau}$ " da V.

- Se $(\tilde{i}\tilde{j}|\tilde{r}\tilde{s}) \in Q_{\tilde{T}}$, allora ovviamente $(ij|rs) \in Q_T$
- Se $(ij|rs) \in Q_T$, allora $\exists\, V \in \binom{[n] - \{ijrs\}}{k-2}$ tc $(\tilde{i}\tilde{j}|\tilde{r}\tilde{s}) \in Q_{\tilde{T}}$

Infatti

Dato che $(ij|rs) \in Q_T$, si ha che $T|_{ijrs}$ è così:



Sia e un edge del cammino $p_1 p_2$. Rimuovendo e si divide T in due parti T_1, T_2. Si ha:

$$\#\left(L(T) - \{i,j,r,s\}\right) = n-4 \geq 2k-5$$

Quindi o $\#\left(L(T_1) - \{i,j,r,s\}\right) \geq k-2$ o $\#\left(L(T_2) - \{i\,j\,r\,s\}\right) \geq k-2$

Supponiamo " " " " . Sia $V \in \binom{L(T_1) - \{i\,j\,r\,s\}}{k-2}$

In tal modo $e \notin T|_V$, quindi $(\tilde{i}\tilde{j} \mid \tilde{r}\tilde{s}) \in Q_{\tilde{T}}$ perché quando contraggo V, e non viene contratto.

Quindi

$$(ij \mid rs) \in Q_T$$

$$\Updownarrow \; ◦◦$$

$$\exists\, V \in \binom{[n] - \{i\,j\,r\,s\}}{k-2} \text{ tc } (\tilde{i}\tilde{j} \mid \tilde{r}\tilde{s}) \in Q_{\tilde{T}}$$

$$\Updownarrow \; \text{oss } (\text{infatti in } \tilde{T},\ \tilde{V} \in V(\tilde{T}))$$

$$\exists\, V \in \binom{[n] - \{i\,j\,r\,s\}}{k-2} \text{ tc } w(\tilde{i}\tilde{j}\tilde{V}) + w(\tilde{r}\tilde{s}\tilde{V}) < w(\tilde{i}\tilde{r}\tilde{V}) + w(\tilde{j}\tilde{s}\tilde{V}) = w(\tilde{i}\tilde{s}\tilde{V}) + w(\tilde{j}\tilde{r}\tilde{V})$$

$$\Updownarrow \; (\star)$$

$$\exists\, V \in \binom{[n] - \{i\,j\,r\,s\}}{k-2} \text{ tc } w(ijV) + w(rsV) < w(irV) + w(jsV) = w(isV) + w(jrV)$$

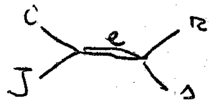
QED

<u>Dim teorema</u>

Dato che le famiglie di k peri di $\mathcal{T}_1$ e $\mathcal{T}_2$ coincidono, si deve avere $Q_{T_1} = Q_{T_2}$ per il lemma. Quindi $T_1 \cong T_2$ per il teorema "I quartetti determinano gli alberi".

Occorre dimostrare che i K-pesi determinano anche i pesi degli edges.

Sia e un lato interno di T. Quindi possiamo trovare $i\ j\ r\ s$ tc $T|_{ijrs}$ sia



Inoltre, analogamente a prima, esiste $V \in \binom{[n]-\{ijrs\}}{k-2}$ tc $e \notin T|_V$

Si ha allora che, per $l=1,2$,

$$D_{irV}(\tau_l)+D_{jsV}(\tau_l)-D_{ijV}(\tau_l)-D_{rsV}(\tau_l)=w_l(e)$$

$$\Rightarrow w_1(e)=w_2(e)$$

~~Per qualsiasi~~ $i\in[n]$, sia e_i il lato adiacente a i.

Per qualsiasi $I\in\binom{[n]}{k}$ si ha (per $l=1,2$)

$$D_I(\tau_l)=\sum_{i\in I} w_l(e_i)+\sum_{\substack{e \text{ edge} \\ \text{interno di } T|_I}} w_l(e) \qquad (*)$$

Inoltre $\forall\, i\,j\in[n]$ $\forall\, S\in\binom{[n]-\{ij\}}{k-1}$

$D_{iS}-D_{jS}$

$$w_l(e_i)-w_l(e_j)=\sum_{u\in(iS)} w_l(e_u)-\sum_{u\in(jS)} w_l(e_u)$$

$$=\Bigg(D_{iS}(\tau_l)-\sum_{\substack{e \\ \text{edge} \\ \text{interno} \\ \text{di } T|_{iS}}} w_l(e)\Bigg)-\Bigg(D_{jS}(\tau_l)-\sum_{\substack{e \\ \text{edge} \\ \text{interno} \\ \text{di } T|_{jS}}} w_l(e)\Bigg)$$

Quindi le differenze dei pesi dei twigs sono determinate dai K pesi.

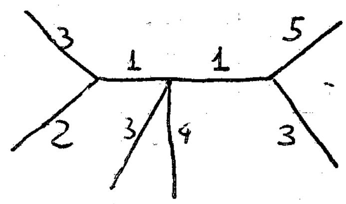
Per la formula $(*)$ anche i pesi dei twigs " "

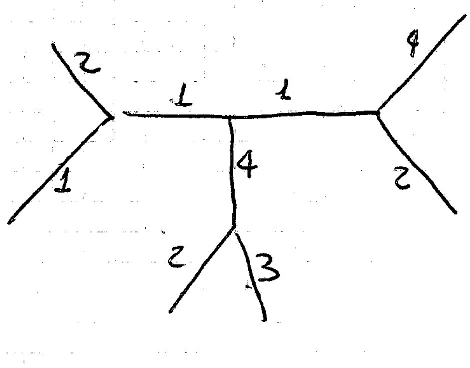
" infatti $D_I=(k+1)w(e_{\bar{i}})+\sum_{i\in I}\big(w(e_i)-w(e_{\bar{i}})\big)+\sum_{\substack{e \text{ edge} \\ \text{int di } T|_I}} w(e)$

QED

OSS Se $n<2k-1$, l'enunciato non è più vero:

$n=6$
$k=4$





hanno la stessa famiglia di 4 pesi

OSS Il teorema di Pachter - Speyer vale anche per alberi filogen. non rooted pesati con pesi degli edges interni positivi.

Definizione Sia X un insieme finito, $k \in \mathbb{N}$ $2 \leq k \leq \# X$.
Sia $\{D_I\}_{I \in \binom{X}{k}}$ una famiglia in $\mathbb{R}$.
Si dice che è treelike se e solo se $\exists$ un X-tree filogenetico $\mathcal{T}$ pesato non negat con gli edges interni pesati positivamente tc
$$D_I(\mathcal{T}) = D_I \quad \forall I \in \binom{X}{k}$$
Questo equivale a "$\exists$ un X tree filog $\mathcal{T}$ pesato non neg tc $D_I(\mathcal{T}) = D_I$ $\forall I \in \binom{X}{k}$"
(infatti dato un albero siffatto possiamo contrarre gli edges interni con peso 0).

Teorema (Herrmann, Huber, Moulton, Spillner, 2011)
"Caratterizzazione delle famiglie di k-pesi treelike per k piccolo"
Sia X un insieme finito. Sia $k \in \mathbb{N}$ $2 \leq k \leq \frac{\# X}{2}$.
Sia $\{D_I\}_{I \in \binom{X}{k}}$ una famiglia in $\mathbb{R}$.
Essa è treelike $\Longleftrightarrow$ $\forall Y$ $2k$-sottoinsieme di X la famiglia $\{D_I\}_{I \in \binom{Y}{k}}$ è treelike

Dim
Per $k=2$ è il teorema di Buneman. Quindi possiamo supporre $k \geq 3$
$\Longrightarrow$ OVVIA
$\Longleftarrow$ • Supponiamo $\{D_I\}_{I \in \binom{Y}{k}}$ sia treelike $\forall Y$ $2k$-sottoinsieme di X.

• Allora $\{D_I\}_{I \in \binom{Z}{k}}$ è treelike $\forall Z$ i-sottoinsieme di X con $k \leq i \leq 2k$. Sia $\mathcal{T}_Z = (T_Z, w_Z)$ lo Z albero filog che realizza $\{D_I\}_{I \in \binom{Z}{k}}$

• In particolare $\{D_I\}_{I \in \binom{Z}{k}}$ è treelike $\forall Z$ $(2k-1)$-sottoinsieme di X

Per qualsiasi Z $(2k-1)$ sottoinsieme di X e per qualsiasi $a, b \in X$, $\mathcal{T}_Z$ determina una distanza fra a e b, $d_Z(a,b)$

Vogliamo dimostrare che $d_Z(a,b) = d_{Z'}(a,b)$ $\forall Z\ Z'$ $(2k-1)$ sottoinsiemi di X contenenti a e b

Basta dimostrarlo per $Z' = Z - \{x\} \cup \{y\}$

Consideriamo $Y = Z \cup Z' = Z \cup \{y\} = Z' \cup \{x\}$ $\Rightarrow \# Y = 2k$

Per ipotesi $\{D_I\}_{I \in \binom{Y}{k}}$ è treelike ;

per il teorema di Pachter - Speyer $\tau_Y|_Z = \tau_Z$ e $\tau_Y|_{Z'} = \tau_{Z'}$

$\Rightarrow d_Z(a,b) = d_Y(a,b) = d_{Z'}(a,b)$

Chiamo d la distanza così determinata $d(a,b) = d_Z(a,b)$

$\forall Z$ $(2k-1)$-sottoinsieme di X.

Essa soddisfa la 4-points condition infatti dati $a\,b\,c\,d$, sia

$Z \ni a, b, c, d$ $\quad d(x,y) = d_Z(x,y) \quad \forall x,y \in \{a\,b\,c\,d\}$

$\Rightarrow$ vale la 4-point condition

$\Rightarrow \exists\ \tau = (T, w)$ t.c. $D_{ij}(\tau) = d(i,j) \quad \forall i,j$

$\tau|_Z = \tau_Z$ $\quad \forall Z$ $(2k-1)$ sottoinsieme di X perché hanno la stessa famiglia di 2-pesi

$$\Rightarrow D_I(\tau|_Z) = D_I(\tau_Z) \quad \forall I \in \binom{Z}{k}$$

$$\underset{D_I(\tau)}{\parallel} \qquad \underset{D_I}{\parallel}$$

$$\Rightarrow D_I(\tau) = D_I \quad \forall I$$

<u>QED</u>

REALIZZAZIONI OTTIMALI (cenni)

Def Sia $\{D_I\}_{I \in \binom{[n]}{2}}$ una famiglia in $\mathbb{R}_{\geq 0}$.
Si dice che un grafo $\mathcal{G} = (G, w)$ non negat pesato con $[n] \subset V(G)$ realizza tale famiglia se $D_I(\mathcal{G}) = D_I \quad \forall\, I \in \binom{[n]}{2}$

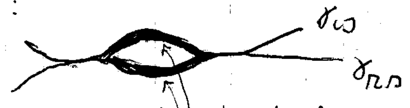
Si dice che $\mathcal{G}$ è una realizzazione ottimale della famiglia se la realizza e dato una qualsiasi altra realizzazione $\mathcal{G}' = (G', w')$ si ha:

$$w(G) \leq w'(G').$$

Teorema ([Imrich, Simoes-Pereira, Zamfirescu], [Dress] (1984))
Sia $\{D_I\}_{I \in \binom{[n]}{2}}$ una famiglia in $\mathbb{R}_{\geq 0}$ realizzabile da un grafo.
Allora essa ha una realizzazione ottimale

Dim
Sia $\mathcal{G} = (G, w)$ un grafo non negat pesato con $[n] \subset V(G)$ realizzante la famiglia.
Allora esiste un grafo non neg pesato $\mathcal{A} = (A, w_A)$ con $[n] \subset V(A)$ e realizzante la famiglia tale che
- A non ha vertici non labellati di grado 2
- $\forall\, ij \in [n]$ (con $i \neq j$) $\exists\, \gamma_{ij}$ cammino fra i e j tc $w_A(\gamma_{ij}) = D_{ij}$ e
  $$A = \bigcup_{ij} \gamma_{ij}$$
- $\gamma_{ij} \cap \gamma_{rs}$ è connesso $\quad \forall\, ij\, rs \in [n]$
- $w_A(A) \leq w(G)$

si infatti γ_{ij} e γ_{rs} fossero così:



allora questi due tratti dovrebbero avere lo stesso peso, quindi ne posso eliminare uno

I cammini γ_{ij} sono $\binom{n}{2}$

Le coppie di cammini γ_{ij} sono $\binom{\binom{n}{2}}{2}$

Ciascuna coppia può originare al più due vertici di grado ≥ 3

$\Rightarrow$ I vertici di A non labellati (che sono per forza di grado ≥ 3) sono al più $2\binom{\binom{n}{2}}{2}$

I vertici di A sono al più $2\binom{\binom{n}{2}}{2} + n$

I grafi con al più " " sono un numero finito. Siano essi $G_1 \dots G_k$.

Per qualsiasi $i = 1 \dots k$ sia

$$W_i = \Big\{ w \ E(G_i) \to \mathbb{R} \quad t.c. \quad w(e) \in [0, \max_{ij} D_{ij}] \ \forall e \in E(G_i)$$

$$w(i, t_1) + w(t_1, t_2) + \dots + w(t_k, j) \underset{\star}{\geq} D_{ij} \quad \forall ij \in [n] \ \forall k \in \mathbb{N} \ \forall t_1 \dots t_k \in V(G_i)$$

per $\forall ij \in [n]$ esiste un cammino fra i e j, $i t_1 \dots t_k j$ per cui vale l' $=$ in $\star$ $\Big\}$

W_i è chiuso e limitato, quindi è un compatto

Considero la funzione da W_i a $\mathbb{R}$ seguente

$$w \longmapsto \sum_{e \in E(G_i)} w(e)$$

essa è continua, quindi assume un minimo su W_i; chiamo $\overline{w_i}$ l'elemento di W_i in cui assume il minimo (esso è un peso su G_i t.c. $(G_i \overline{w_i})$ realizza la famiglia)

Sia $l \in \{1, \dots k\}$ t.c.

$$\overline{w_l}(G_l) = \min_{i=1 \dots k} \overline{w_i}(G_i)$$

Il grafo $(G_l, \overline{w_l})$ è ~~la~~ una realizz. ottimale della nostra famiglia

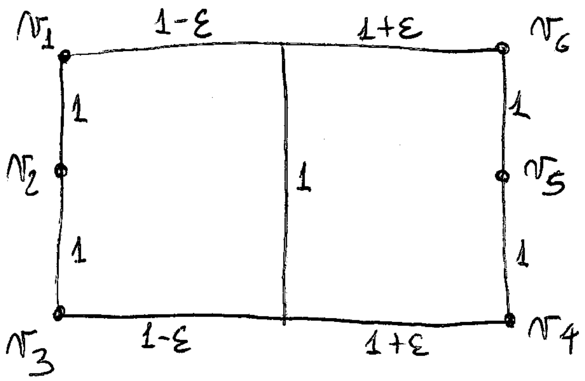
QED

Le realizzazioni ottimali sono uniche?

NO [Althöfer] 1988 esibisce un controesempio:

Sia $D = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 3 & 2 \\ & 0 & 1 & 3 & 4 & 3 \\ & & 0 & 2 & 3 & 3 \\ & & & 0 & 1 & 2 \\ & & & & 0 & 1 \\ & & & & & 0 \end{pmatrix}$

essa ammette infinite realizzazioni ottimali:



con $\varepsilon \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$

(che queste sono ottimali non è banale
la dimostrazione è lunga!)

Dato un grafo che realizza una famiglia, un metodo per abbassare il peso totale è il seguente:

- eliminare i lati "ridondanti", cioè i lati $\{i,j\}$ t.c. $\exists k$ t.c.

$$w(\{i,j\}) \geq D_{ik} + D_{kj}$$

con $i,j,k \in [n]$

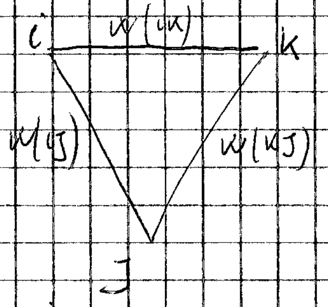
(posso eliminarli senza alterare i due-pesi infatti ~~[illegible]~~ se un cammino P realizzante D_{ab} con $a,b \in [n]$ passa per $\{i,j\}$, allora il cammino ottenuto da esso sostituendo $\{i,j\}$ con cammino realizzante D_{ik} $\cup$ cammino realizzante D_{kj} ha peso $\leq w(P)$.)

- fare "riduzioni triangolari":

se ho tre vertici $i\ j\ k$ (collegati da edges e) t.c.

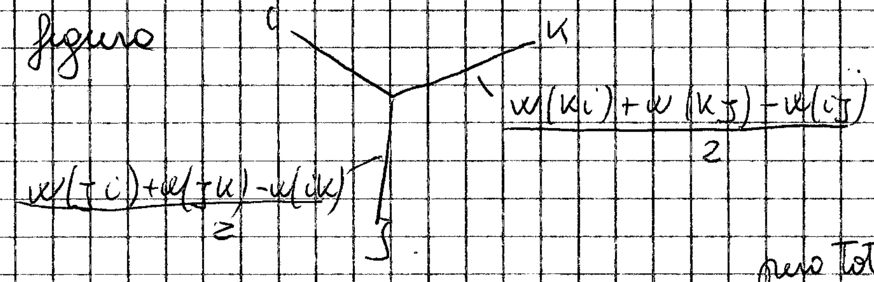
$$w(\{i,j\}) \leq w(\{i,k\}) + w(\{k,j\})$$
$$w(\{i,k\}) \leq w(\{i,j\}) + w(\{j,k\})$$
$$w(\{j,k\}) \leq w(\{j,i\}) + w(\{i,k\})$$

rimpiazzo il triangolo



(peso tot del triangolo $w(ik)+w(ij)+w(jk)$)

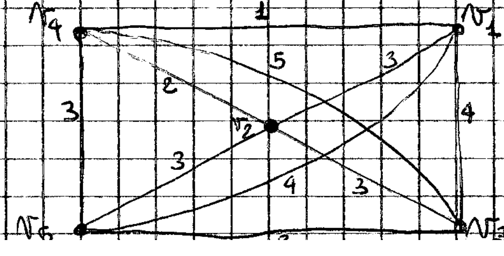
con le seguenti figure



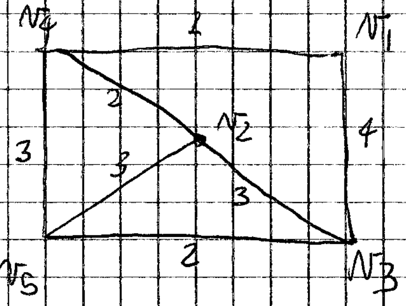
peso totale $\frac{w(ik)+w(ij)+w(jk)}{2}$

Non è detto però che tale processo porti a una realizzazione ottimale

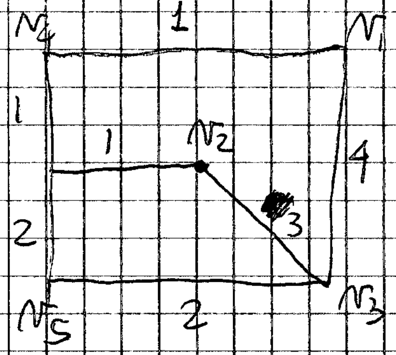
Esempio



elimino i lati ridondanti

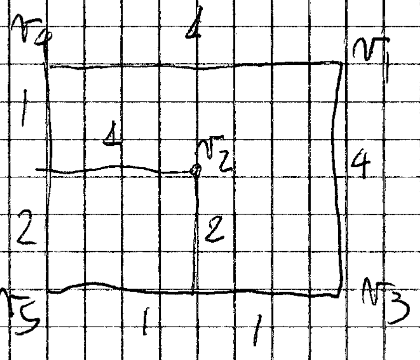


faccio una riduz triang



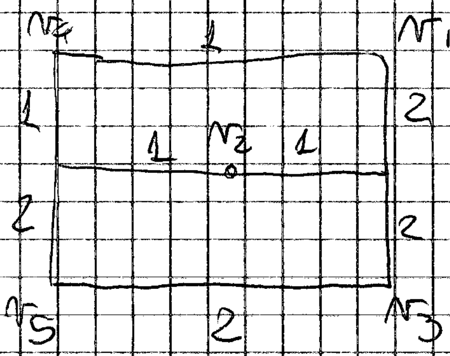
peso totale 14

aggiungo edge ridond da v_2 e v_5 con peso 3 e faccio riduz triang



peso totale 13

ma non è ~~[illegible]~~ ottimale



Peso Tot 12

<u>Teorema</u> Sia $\{D_I\}_{I \in \binom{[n]}{2}}$ realizzato da un albero T con $L(T) \subset [n]$.

Allora tale realizzazione è ottimale

(vedere [Hakimi Yau])