REALIZZAZIONI OTTIMALI (cenni)

Def Sia $\{D_I\}_{I \in \binom{[n]}{2}}$ una famiglia in $\mathbb{R}_{\geq 0}$.

Si dice che un grafo $\mathcal{G} = (G, w)$ CONNESSO non negat pesato con $[n] \subset V(G)$ realizza tale famiglia se $D_I(\mathcal{G}) = D_I \quad \forall\, I \in \binom{[n]}{2}$

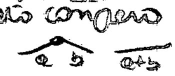
Si dice che $\mathcal{G}$ è una realizzazione ottimale della famiglia se la realizza e dato una qualsiasi altra realizzazione $\mathcal{G}' = (G', w')$ si ha:

$$w(G) \leq w'(G').$$

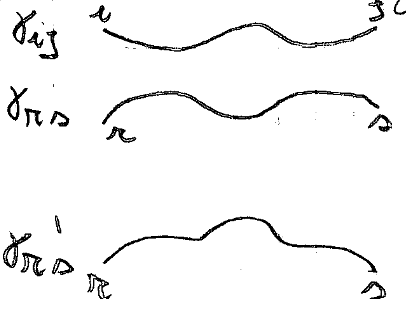
Teorema ([Imrich, Simoes-Pereira, Zamfirescu], [Dress] (1984))
Sia $\{D_I\}_{I \in \binom{[n]}{2}}$ una famiglia in $\mathbb{R}_{\geq 0}$ realizzabile da un grafo CONNESSO.
Allora essa ha una realizzazione ottimale

Dim

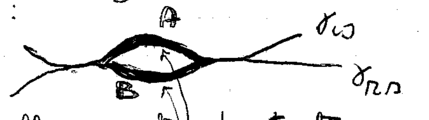
Sia $\mathcal{G} = (G, w)$ un grafo non negat pesato con $[n] \subset V(G)$ realizzante la famiglia.
Allora ~~esiste~~ a partire da $\mathcal{G}$ posso costruire un grafo non neg pesato $A = (A, w_A)$ con $[n] \subset V(A)$ e realizzante la famiglia tale che

- A non ha vertici non labellati di grado 2 [basta "allisciare" ogni vertice di grado 2 non labellato, cioè sostituire i due lati a lui adiacenti con un unico lato con peso la somma dei pesi  $a \quad b \quad a+b$
- $\forall\, ij \in [n]$ con $i \neq j$ $\exists\, \gamma_{ij}$ cammino fra i e j t.c. $w_A(\gamma_{ij}) = D_{ij}$ e
  $A = \bigcup_{ij} \gamma_{ij}$ [basta prendere $\forall\, ij$ un cammino che realizza D_{ij} e poi togliere tutto il resto
- $\gamma_{ij} \cap \gamma_{rs}$ è connesso $\forall\, ijrs \in [n]$
- $w_A(A) \leq w(G)$

infatti le operazioni che ho fatto per ottenere A da $\mathcal{G}$ non aumentano il peso totale



se infatti γ_{ij} e γ_{rs} fossero così:



allora questi due tratti dovrebbero avere lo stesso peso, quindi si posso considerare invece di γ_{rs}, il cammino

I cammini γ_{ij} sono $\binom{n}{2}$

Le coppie di cammini γ_{ij} $\{\gamma_{ij}, \gamma_{rs}\}$ sono $\binom{\binom{n}{2}}{2}$

Ciascuna coppia può originare al più due vertici di grado ≥ 3

$\Rightarrow$ I vertici di A non labellati (che sono per forza di grado ≥ 3) sono al più $2\binom{\binom{n}{2}}{2}$

infatti i vertici non labellati sono per forza di grado ≥ 3, d'altra parte stanno sicuramente su un γ_{ij}, dato che $A = \bigcup \gamma_{ij}$; ma dato che sono di grado ≥ 3 devono stare su almeno due γ_{ij} e ogni coppia di γ_{ij} ne può originare al più 2

I vertici di A sono al più $2\binom{\binom{n}{2}}{2} + n$

I grafi con al più " " con n labels sono un numero finito. Siano essi $A_1, \dots, A_k$.

Per qualsiasi $s = 1 \dots k$ sia

$$W_s = \Big\{ w : E(A_s) \to \mathbb{R} \ \text{tc} \ w(e) \in [0, \max_{ij} D_{ij}] \ \forall e \in E(A_s)$$

$$w(i,t_1) + w(t_1,t_2) + \dots + w(t_k,j) \underset{\star}{\geq} D_{ij} \quad \forall ij \in [n] \ \forall k \in \mathbb{N} \ \forall t_1 \dots t_k \in V(A_s)$$

per $\forall ij \in [n]$ esiste un cammino fra i e j, $i t_1 \dots t_k j$ per cui vale l'$=$ in $\star$ $\Big\}$

W_s è chiuso e limitato, quindi è un compatto

Considero la funzione da W_s a $\mathbb{R}$ seguente

$$w \longmapsto \sum_{e \in E(A_s)} w(e)$$

essa è continua, quindi assume un minimo su W_s; chiamo $\overline{w_s}$ l'elemento di W_s su cui assume il minimo (esso è un peso su A_s tc $(A_s, \overline{w_s})$ realizza la famiglia)

Sia $q \in \{1, \dots k\}$ tc

$$\overline{w_q}(A_q) = \min_{s=1\dots k} \overline{w_s}(A_s)$$

Il grafo $(A_q, \overline{w_q})$ è una realizz ottimale della nostra famiglia

QED