L'implementazione di una procedura di decisione per la teoria degli spazi metrici

Marco Maggesi

DiMaI - Università degli Studi Firenze

Seminario di Logica e Filosofia della Scienza - a.a. 2015-2016
Firenze, venerdì 22 gennaio 2016

Introduzione

Obiettivo di questo lavoro: La **meccanizzazione** degli **spazi metrici** in **HOL Light**.

Molti risultati interessanti erano già stati dimostrati in HOL Light per lo spazio euclideo da Harrison.

Tuttavia, questi teoremi valgono nel contesto più generale degli **spazi metrici completi**.

Risultati:

- Una definizione di **spazio metrico astratto** in HOL Light.
- La dimostrazione alcuni risultati della teoria nella loro **piena generalità**.
- L'implementazione di una procedura di decisione per la teoria elementare degli spazi metrici.

Distanza e spazi metrici

Definizione (nella teoria degli insiemi)

- Una *distanza* su X è una funzione

$$d : (X \times X) \longrightarrow \mathbb{R}$$

  con le proprietà:
  - *Positività:* $d(x, y) \geq 0$;
  - *Riflessività:* $d(x, x) = 0$;
  - *Indiscernibilità:* $d(x, y) = 0 \Longrightarrow x = y$;
  - *Simmetria:* $d(x, y) = d(y, x)$;
  - *Disuguaglianza triangolare:* $d(x, y) + d(y, z) \geq d(x, z)$.
- Una coppia (X, d) dove d è una distanza su X si dice *spazio metrico*.

Esempi di spazi metrici

- L'usuale distanza euclidea su $\mathbb{R}^n$:

$$d(x,y) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + \cdots + (x_n - y_n)^2}$$

- La distanza L^∞ su $\mathbb{R}^n$:

$$d_\infty(x,y) = \max\{|x_1 - y_1|, \ldots, |x_n - y_n|\}$$

- La distanza di Manhattan (distanza L^1) su $\mathbb{R}^n$:

$$d_1(x,y) = |x_1 - y_1| + \cdots + |x_n - y_n|$$

- La distanza indotta dalla norma di uno spazio vettoriale:

$$d(u,v) = ||u - v||$$

- La distanza L^∞ sulle funzioni continue in $[0,1]$

$$d_\infty(f,g) = \max\{|f(x) - g(x)| : 0 \leq x \leq 1\}$$

Spazi metrici completi

Successioni di Cauchy: Quando la distanza tra i sui elementi diventa arbitrariamente piccola dopo un certo indice.

Tutte le successioni convergenti sono di Cauchy. In generale non è vero il viceversa.

Definizione: Uno spazio metrico si dice *completo* se ogni successione di Cauchy è convergente.

Alcuni risultati:

- Teorema della categoria di Baire.
- Teorema del punto fisso di Banach.
- Dimostrazione di vari criteri di completezza.
- Dimostrazione della completezza di certi spazi notevoli ($\mathbb{R}^n$, funzioni limitate, funzioni continue e limitate).

Esempio: teorema della categoria di Baire

Teorema della categoria di Baire: Sia M uno spazio metrico completo e U_n una famiglia numerabile di aperti densi in M. Allora la loro l'interesezione $\bigcap_n U_n$ è densa in M.

```
METRIC_BAIRE_CATEGORY
|- !m U.
      mcomplete m /\
      COUNTABLE U /\
      (!t. t IN U
           ==> open_in (mtopology m) t /\
               mtopology m closure_of t = mspace m)
      ==> mtopology m closure_of INTERS U = mspace m
```

Applicazione: teorema di Picard-Lindelöf

Teorema di Picard-Lindelöf: Esistenza ed unicità della soluzione ad un problema di Cauchy sotto (opportune ipotesi):

$$\begin{cases} u'(t) = f(t, u(t)) \\ u(t_0) = u_0 \end{cases}$$

Dimostrazione meccanizzata: Riduzione ad un problema di punto fisso sullo spazio metrico completo delle funzioni limitate continue e applicazione del teorema di Banach.

Procedure di decisione in HOL Light

- HOL Light mette a disposizione diverse procedure di decisione:
  - Aritmetica lineare (su $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{R}$, ...);
  - MESON;
  - Basi di Gröber (su $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$);
  - Sum of Squares (SOS);
  - Spazi vettoriali normati;
  - ...
- Qui viene presentata una nuova procedura di decisione per la teoria elementare degli spazi metrici basandosi sul lavoro

  R. M. Solovay, R. D. Arthan, J. R. Harrison
  Some new results on decidability for elementary algebra and geometry
  Ann. of Pure and Appl. Logic, vol. 163, pp. 1765-1802, 2012.

Indecidibilità della teoria degli spazi metrici

La teoria elementare degli spazi metrici è indecidibile

- La teoria degli spazi metrici è indecidibile [Bondi 1973].
- Una semplice dimostrazione [Kutz 2003] si ottiene usando particolari spazi metrici associati ai grafi e riconducendosi a problemi di indecidibilità sulle relazioni binarie.

Problema

Trovare una classe decidibile di formule valide nel linguaggio degli spazi metrici.

Frammenti decidibili AE ed EA

Definizione

- Una formula ϕ di dice AE se
  - è in forma prenessa e
  - i quantificatori universali precedono quelli esistenziali
- Brevemente scriveremo

$$\phi \equiv \forall \bar{x}.\, \exists \bar{y}.\, \psi$$

- Analogamente si definisce la classe delle formule EA (o $\exists\forall$):

$$\phi \equiv \exists \bar{x}.\, \forall \bar{y}.\, \psi$$

Teorema

(1) La classe delle sentenze AE valide senza simboli funzionali è decidibile.

(2) La classe delle sentenze EA soddisfacibili senza simboli funzionali è decidibile.

Dimostrazione (Idea)

- Ovviamente (1) $\Longleftrightarrow$ (2). Dimostriamo (2).
- Skolemizzando una sentenza EA si ottiene una sentenza senza quantificatori esistenziali e senza simboli di funzione.
- Per il teorema di Herbrand dobbiamo controllare soltanto un numero finito di interpretazioni.

È possibile adattare la dimostrazione a certi casi in cui occorrono i simboli di funzione.

Sentenze AEp e EAp

Definizione

- Una sentenza del linguaggio degli spazi metrici ϕ si dice AEp se
  1. è in forma prenessa e
  2. non ha quantificatori universali sui punti nel campo di un quantificatore esistenziali di qualsiasi sorta.
- La definizione di senteza EAp è analoga.

Osservazione

A meno di permutare i quantificatori universali possiamo supporre che una formula ϕ AE sia della forma

$$\phi \equiv \forall x_1, \ldots, x_n. \exists \bar{y} / Q\bar{z}. \psi$$

Note

Osservazione

- L'insieme vuoto ha struttura banale di spazio metrico.
- Tuttavia escludiamo tra le interpretazioni quella sull'insieme vuoto.
- Ad esempio, la formula $\exists x.\, 0 = 0$, è logicamente valida.

Osservazione

Possiamo sempre assumere che ϕ abbia almeno un quantificatore universale. In caso contrario possiamo sostituire ϕ con la formula logicamente equivalente $\forall x.\, \phi$.

Idea generale

La validità generale delle formule AEp nel linguaggio degli spazi metrici può essere ricondotta attraverso passaggi successivi alla validità di una formula nei campi reali chiusi secondo il seguente schema:

$$\begin{array}{c} \text{Spazi} \\ \text{metrici} \end{array} \;\text{———}\; \begin{array}{c} \text{Spazi} \\ \text{metrici} \\ \text{finiti} \end{array} \;\text{———}\; (\mathbb{R}^n, d_\infty) \;\text{———}\; \begin{array}{c} \text{Campi} \\ \text{reali} \\ \text{chiusi} \end{array}$$

Teorema

Data una sentenza AEp nel linguaggio degli spazi metrici $\phi \equiv \forall x_1, \ldots, x_n.\, \exists \bar{y}/\mathrm{Q}\bar{z}.\, \psi$ sono equivalenti:

(1) ϕ è valida in tutti gli spazi metrici (non vuoti);

(2) ϕ è valida in tutti gli spazi metrici con al più $\max\{n, 1\}$ punti.

Dimostrazione (1) $\Longrightarrow$ (2).

Ovvio. $\square$

Dimostrazione (2) $\Longrightarrow$ (1).

Sia ϕ valida in tutti gli spazi metrici con al più n punti.
Scelti i punti $x_1, \ldots, x_n$, la formula $\rho :\equiv \exists \bar{y}/\mathrm{Q}\bar{z}.\, \psi$ è valida sullo spazio metrico $K := \{x_1, \ldots, x_n\} \subseteq M$.
Quindi ϕ è valida su M. $\square$

Costruzione

Sia (M, d) uno spazio metrico finito costituito da n punti $p_1, \ldots, p_n$.
Si consideri su $\mathbb{R}^n$ la metrica L^∞

$$d_\infty(x, y) = \max\{|x_1 - y_1|, \ldots, |x_n - y_n|\}$$

Allora l'applicazione

$$f_M \colon M \to \mathbb{R}^n$$

definita da

$$f_M(p) = (d(p, p_1), \ldots, d(p, p_n))$$

è un'immersione isometrica.

Teorema

La classe delle sentenze AEp logicamente valide nel linguaggio degli spazi metrici è decidibile.

Dimostrazione: Passando alla negazione cerchiamo una procedura di decisione per la soddisfacibilità delle sentenze EAp.
Sia $\phi \equiv \exists x_1, \ldots, x_n. \forall \bar{y}/\mathrm{Q}\bar{z}. \psi$.
Per il teorema precedente, ϕ è soddisfacibile se e solo se esiste una interpretazione di $x_1, \ldots, x_n$ in uno spazio metrico M di al più $\max(n, 1)$ punti che soddisfa $\forall \bar{y}/\mathrm{Q}\bar{z}. \psi$.
Sostituendo ogni sottoformula di ϕ della forma $\forall y. \psi$ con la congiunzione $\psi[x_1/y] \wedge \cdots \wedge \psi[x_n/y]$ otteniamo una sentenza che è equisoddisfacibile con ϕ che non ha quantificatori universali sui punti.
Possiamo perciò assumere che ϕ abbia la forma $\exists x_1 \ldots x_n. \psi$ dove ψ contiene soltanto quantificatori sugli scalari.

Continua . . .

Dimostrazione (continua):
Usando l'immersione isometrica $f : M \to \mathbb{R}^n$, abbiamo che ϕ è soddisfacibile se e solo se lo è su $(\mathbb{R}^n, d_\infty)$.
Siano allora x_{ij}, $1 \leq i, j \leq n$ nuove variabili scalari $(f_M(x_i) = (x_{i1}, \ldots, x_{in})$ e ψ' la formula ottenuta rimpiazzando in ψ

- ogni sottotermine della forma $x_s = x_t$ con $x_{s1} = x_{t1} \wedge \cdots \wedge x_{sn} = x_{tn}$ e
- ogni sottotermine della forma $d(x_s, x_t)$ con $d_\infty(f_M(x_s), f_M(x_t)) = \max\{|x_{s1} - x_{t1}|, \ldots, |x_{sn} - x_{tn}|\}$

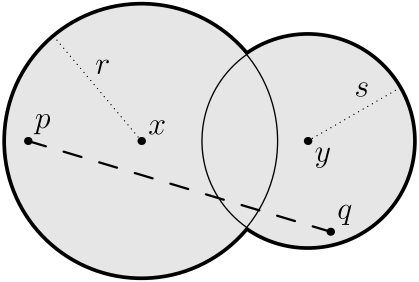
$\exists x_1 \ldots x_n . \psi$ è soddisfacibile se e solo se $\phi' :\equiv \exists x_{11}, x_{12} \ldots x_{nn} . \psi'$ lo è.
Ma ϕ' è una formula senza variabili sui punti quindi possiamo applicare una procedura di decisione per i campi reali chiusi.

CVD

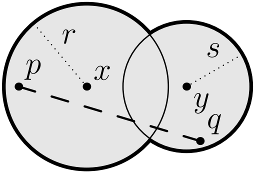
Esempio 1

Il diametro dell'unione di due palle che si intersecano è minore del doppio della somma dei loro raggi:

$$d(p,q) < 2(r+s)$$



Esempio 1

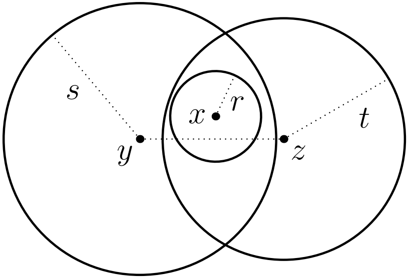



```
g `!m x y:W r s.
     ~(DISJOINT (mball m (x,r)) (mball m (y,s)))
     ==> !p q. p IN mball m (x,r) UNION mball m (y,s) /\
               q IN mball m (x,r) UNION mball m (y,s)
               ==> mdist m (p,q) < &2 * (r + s)`;;
e (REWRITE_TAC[DISJOINT; FORALL_IN_UNION; IMP_CONJ;
    RIGHT_FORALL_IMP_THM; EXTENSION; IN_INTER;
    NOT_IN_EMPTY; IN_MBALL]);;
time e METRIC_ARITH_TAC;;
top_thm();;
```

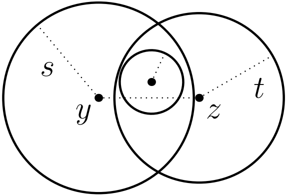
Esempio 2

Example: la distanza tra i centri y e z di due palle $B(y, s)$ and $B(z, t)$ contenenti una palla $B(x, r)$ è minore o uguale della somma $s + t$ dei loro raggi.

$$d(y, z) < s + t$$

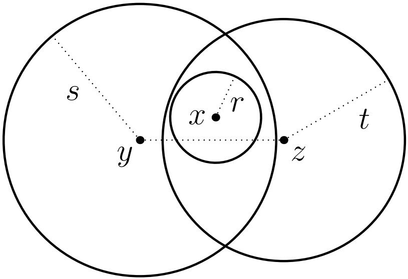


Esempio 2




```
g `!m x y z r s t.
     x IN mspace m /\ y IN mspace m /\ z IN mspace m /\
     &0 < r /\
     mball m (x,r) SUBSET mball m (y,s) /\
     mball m (x,r) SUBSET mball m (z,t)
     ==> mdist m (y,z) <= s + t`;;
e (SIMP_TAC[SUBSET; IN_MBALL]);;
e METRIC_ARITH_TAC;;
top_thm();;
```

Limitazioni: Esempio

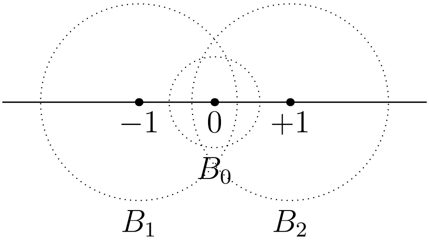


Domanda: Possiamo migliorare il risultato precedente dimostrando la una disuguaglianza più stretta?

$$d(y, z) < s + t - 2r$$

Risposta: La procedura di decisione fallisce: la disuguaglianza è valida nello spazio euclideo, ma falsificabile su altri modelli.

Limitazioni: Esempio (continua)



Consideriamo lo spazio rappresentato in figura, formato da tre punti $M = \{-1, 0, 1\}$ con la distanza euclide. Le palle B_1 e B_2 hanno raggio 1.3, mentre B_0 ha raggio 0.6. Quindi $B_0 = \{0\}, B_{-1} = \{-1, 0\}, B_1 = \{0, 1\}$ e risulta

$$B_1 \cap B_2 = B_0.$$

La disuguaglianza non vale in questo modello.